[redacted]

[illegible]

m. 1 Tafel.

NIEUW ARCHIEF

VOOR

WISKUNDE.

Deel XVIII.

AMSTERDAM,
W. VERSLUYS.
1891.

Het „Nieuw Archief voor Wiskunde" *wordt uitgegeven door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam*, „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven."

De inrichting en het doel van dit Tijdschrift zijn dezelfde gebleven als in de Voorrede van het Eerste Deel werd aangekondigd.

DE REDACTEUR,

LEIDEN, Juli 1891. D. BIERENS DE HAAN,

Eerste Secretaris van het Genootschap,

onder de zinspreuk:

EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN.

INHOUD.

PRIJSVRAAG N°. 6 VAN HET JAAR 1889,

OPGELOST DOOR

Dr. G. SCHOUTEN.

Een zware omwentelingsellipsoïde is bevestigd aan eene as, gaande door een der. brandpunten; men verlangt de meetkundige plaats van het slingerpunt voor verschillende standen der as.

---

1. Wij zullen het vraagstuk algemeen opvatten, de ellipsoïde vervangen door een willekeurig lichaam, en het brandpunt door een willekeurig punt.

Wij kiezen het zwaartepunt van het lichaam tot oorsprong van een coördinatenstelsel, welks assen samenvallen met de hoofdassen van traagheid in dat punt.

Laat a de traagheidsstraal zijn ten opzichte van de X-as, b die ten opzichte van de Y-as, c die ten opzichte van de Z-as en k die ten opzichte van eene lijn door het zwaartepunt, welke met de assen de hoeken λ, μ en ν maakt.

Dan is

$$k^2 = a^2 \cos^2 \lambda + b^2 \cos^2 \mu + c^2 \cos^2 \nu \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Zijn p, q en r de coördinaten van het punt, waar alle ophangassen doorheen moeten gaan, dan is

$$\frac{x-p}{\cos \lambda} = \frac{y-p}{\cos \mu} = \frac{z-r}{\cos \nu} = \rho$$

de vergelijking van eene lijn, die door dit punt gaat, en ten opzichte waarvan de traagheidsstraal $\sqrt{k^2+l^2}$ is, waar k door (1) gegeven wordt, en l den afstand voorstelt van het zwaartepunt tot die lijn.

Om de waarde van l te vinden schrijven wij de vergelijking op van de lijn, die het zwaartepunt met een willekeurig punt

$$x\,(=\rho\cos\lambda+p),\;y\,(=\rho\cos\mu+q),\;z\,(=\rho\cos\nu+r)$$

van die lijn verbindt, namelijk

$$\frac{\xi}{x}=\frac{\eta}{y}=\frac{\zeta}{z},$$

waar ξ, η, ζ de loopende coördinaten zijn, en drukken de voorwaarde uit, dat zij loodrecht staat op de ophangas, namelijk

$$x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu=0;$$

dan gaat deze, als voor x, y, z hunne waarden worden gesteld, over in

$$\rho+p\cos\lambda+q\cos\mu+r\cos\nu=0.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

Hieruit volgt, dat

$$l^2=x^2+y^2+z^2=\rho^2+p^2+q^2+r^2+2\rho\,(p\cos\lambda+q\cos\mu+r\cos\nu)$$

overgaat in

$$l^2=p^2+q^2+r^2-\rho^2,\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(3)$$

waarin ρ de in (2) gegeven waarde heeft.

Daar het slingerpunt op een afstand $l+\frac{k^2}{l}$ van de ophangas ligt, moeten wij op het verlengde van de loodlijn l, uit het zwaartepunt op de ophangas neergelaten, van uit het zwaartepunt een stuk uitzetten, gelijk aan $\frac{k^2}{l^2}$ maal de lengte van de loodlijn zelve; de coördinaten van het slingerpunt worden dus gegeven door

$$\left.\begin{aligned}x&=-\frac{k^2}{l^2}\,(\rho\cos\lambda+p),\\ y&=-\frac{k^2}{l^2}\,(\rho\cos\mu+q),\\ z&=-\frac{k^2}{l^2}\,(\rho\cos\nu+r).\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(4)$$

Worden uit deze vergelijkingen, door middel van de betrekkingen (1), (2), (3) en

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1,$$

k, ρ, l, λ, μ en ν geëlimineerd, dan zal de uitkomst de vergelijking van het oppervlak wezen, dat door alle slingerpunten wordt gevormd.

2. Het is niet moeilijk het stelsel (4), dat ten opzichte van $\cos\lambda$, $\cos\mu$ en $\cos\nu$ van den vierden graad is, te vervangen door een ander van lageren graad.

Vermenigvuldigen wij daartoe de eerste met $\cos\lambda$, de tweede met $\cos\mu$, de derde met $\cos\nu$, dan geeft de som van de nieuwe vergelijkingen met inachtneming van (2),

$$x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = 0, \quad \ldots\ldots\ (5)$$

boven reeds gevonden.

Zij drukt uit, dat *het slingerpunt gelegen is in een vlak, dat door het zwaartepunt gaat en loodrecht staat op de ophangas.*

Wordt daarentegen de eerste van (4) met p, de tweede met q, de derde met r vermenigvuldigd, dan geeft de som van dit nieuwe stelsel, als (2) en (3) gebruikt worden,

$$px + qy + ry = -k^2. \quad \ldots\ldots\ (6)$$

Deze drukt uit, dat *het slingerpunt gelegen is in een vlak, dat, op een afstand* $\frac{k^2}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$ *van het zwaartepunt verwijderd, loodrecht staat op de lijn, die dit punt met het vaste punt verbindt.*

Wordt eindelijk de eerste van (4) met l^2x, de tweede met l^2y, de derde met l^2z vermenigvuldigd, dan zal de som van dit nieuwe stelsel met inachtneming van (5) geven

$$p\cos\lambda + q\cos\mu + r\cos\nu = V, \quad \ldots\ldots\ (7)$$

waarin

$$V^2 = p^2 + q^2 + r^2 - \frac{(px + qy + rz)^2}{x^2 + y^2 + z^2} =$$

$$= \frac{(qx - py)^2 + (ry - qz)^2 + (pz - rx)^2}{x^2 + y^2 + z^2} \quad \ldots\ (8)$$

gesteld is.

De vergelijking (7) drukt uit, dat de projectie van de verbindingslijn van zwaartepunt en vaste punt op de ophangas gelijk is aan de lengte dier verbindingslijn, vermenigvuldigd met de sinus van den hoek, dien zij met den voerstraal van

het slingerpunt maakt; bijgevolg dat *het slingerpunt gelegen is op de loodlijn uit het zwaartepunt op de ophangas neergelaten.*

De vergelijkingen (4) kunnen dus door het volgende eenvoudiger stelsel vervangen worden

$$\left.\begin{aligned} x \cos\lambda + y \cos\mu + z \cos\nu &= 0, \\ p \cos\lambda + q \cos\mu + r \cos\nu &= V, \\ a^2 \cos^2\lambda + b^2 \cos^2\mu + c^2 \cos^2\nu &= -(p x + q y + r q). \end{aligned}\right\}. \quad (9)$$

3\. De eliminatie van $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ uit deze vergelijkingen kan op de volgende wijze geschieden.

Worden achtereenvolgens $\cos\mu$ en $\cos\lambda$ uit de beide eerste geelimineerd, dan vinden wij

$$(q x - p y)^2 \cos^2\lambda = (V y - (r y - q z) \cos\nu)^2,$$
$$(q x - p y)^2 \cos^2\mu = (V x - (r x - p z) \cos\nu)^2.$$

Voegen wij hierbij de identieke

$$(q x - p y)^2 \cos^2\nu = (q x - p y)^2 \cos^2\nu,$$

dan geeft de som met inachtneming van (8)

$$(q x - p y)^2 = (x^2 + y^2) V^2 + (x^2 + y^2 + z^2) V^2 \cos^2\nu -$$
$$- 2 \{x (r x - p z) + y (r y - q z)\} V \cos\nu.$$

Deze met $(x^2 + y^2 + z^2)$ vermenigvuldigd kan onder de volgende gedaante gebracht worden

$$[(x^2 + y^2 + z^2) V \cos\nu - \{x (r x - p z) + y (r y - q z)\}]^2 =$$
$$= \{x (r x - p z) + y (r y - q z)\}^2 + (x^2 + y^2 + z^2) \times$$
$$\times \{(q x - p y)^2 - (x^2 + y^2) V^2\}.$$

Met het oog op (8) is het tweede lid

$$= x^2 \{(x^2 + y^2 + z^2) V^2 - (r y - q z)^2\} +$$
$$+ y^2 \{(x^2 + y^2 + z^2) V^2 - (r x - p z)^2\} + 2 x y (r x - p z)(r y - q z) +$$
$$+ z^2 (q x - p y)^2 - (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2) V^2 =$$
$$= z^2 (q x - p y)^2 - \{x (r y - q z) - y (r y - p z)\}^2 = 0.$$

Bijgevolg is

$$\cos\nu = \frac{x (r x - p z) + y (r y - q z)}{(x^2 + y^2 + z^2) V} =$$
$$= \frac{r (x^2 + y^2 + z^2) - z (p x + q y + r z)}{(x^2 + y^2 + z^2) V}.$$

Uit de symmetrie van deze waarde voor $\cos\nu$ volgt, dat wij mogen stellen voor $\cos\lambda$ en $\cos\mu$

$$\cos\lambda = \frac{p (x^2 + y^2 + z^2) - x (p x + q y + r z)}{(x^2 + y^2 + z^2) V},$$

$$\cos \mu = \frac{q(x^2+y^2+z^2) - y(px+qy+rz)}{(x^2+y^2+z^2)V}.$$

Worden nu deze waarden van $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$ in de derde van (9) overgebracht, dan vinden wij voor de vergelijking van het oppervlak, als kortheidshalve

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$
$$px + qy + rz = P^2,$$
$$p^2 + q^2 + r^2 = d^2$$

gesteld wordt

$$a^2(pR^2 - xP^2)^2 + b^2(qR^2 - yP^2)^2 + c^2(rR^2 - zP^2)^2 +$$
$$+ R^2P^2(d^2R^2 - P^4) = 0,$$

of bij andere rangschikking

$$R^2(a^2p^2 + b^2q^2 + c^2r^2) + P^4(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) -$$
$$- 2P^2R^2(a^2px + b^2qy + c^2rz) + R^2P^2(d^2R^2 - P^4) = 0.$$

Uit de afleiding dezer vergelijking blijkt, dat haar eerste lid eigenlijk door $R^2(d^2R^2 - P^4)$ moet gedeeld worden.

4. Het ligt voor de hand dit oppervlak op een ander rechthoekig stelsel met denzelfden oorsprong uit te drukken, waarbij de verbindingslijn van zwaartepunt en ophangspunt tot nieuwe X-as wordt genomen.

Dan gaat

$$a^2p^2 + b^2q^2 + c^2r^2 \text{ of } d^2(a^2\cos^2\lambda + b^2\cos^2\mu + c^2\cos^2\nu)$$

over in $\alpha^2 d^2$, als α de traagheidsstraal is ten opzichte van de nieuwe X-as.

De vorm $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$, het eerste lid van de vergelijking der traagheidsellipsoïde, gaat dan over in $\alpha^2x^2 + \beta^2y^2 + \gamma^2z^2 - 2\xi yz - 2\eta zx - 2\zeta xy$, waarin β en γ de traagheidsstralen ten opzichte van de nieuwe Y- en Z-as voorstellen, ξ, η, ζ op een factor na (de massa van het lichaam) de deviatiemomenten om de nieuwe assen. Worden de Y-as en de Z-as genomen volgens de assen der doorsnede, die hun vlak met de traagheidsellipsoide vormt, dan is $\xi = 0$.

Verder zal $a^2px + b^2qy + c^2rz$ overgaan in $(\alpha^2 x - \zeta y - \eta z)d$, P^2 in xd, terwijl $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$ blijft.

De vergelijking (10) zal op de nieuwe assen overgaan in

$$(x^2+y^2+z^2)\alpha^2 d^2 + x^2 d^2(\alpha^2x^2 + \beta^2y^2 + \gamma^2z^2 - 2\eta zx -$$
$$- 2\zeta xy) - 2xd^2(x^2+y^2+z^2)(\alpha^2x - \zeta y - \eta z) +$$
$$+ xd^3(x^2+y^2+z^2)(y^2+z^2) = 0,$$

of na deeling door d^2 en rangschikking

$$(\alpha^2 + d\,x)(y^2 + z^2)^2 + d\,x^3(y^2 + z^2) +$$
$$+ x^2(\beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2) + 2\,x\,(y^2 + z^2)(\zeta\,y + \eta\,z) = 0. \;.\;.\;.\; (10)$$

Het eerste lid moet eigenlijk gedeeld worden door $(y^2 + z^2) \times$ $\times (x^2 + y^2 + z)$.

5. Alvorens over te gaan tot de beschouwing van eenige bijzondere gevallen, willen wij trachten een algemeen denkbeeld te geven van de verschillende gedaanten, die dit oppervlak kan aannemen

1°. Blijkt het, dat $y^2 + z^2 = \infty$ alleen dan aan (10) voldoet, wanneer $\alpha^2 + d\,x = 0$ is.

De meetkundige plaats heeft het vlak $x = -\dfrac{\alpha^2}{d}$ *tot asymptotisch vlak.*

2°. Zal de X-as op het oppervlak (10) zijn gelegen, doch niet op de meetkundige plaats.

Ter bepaling van de punten, die de X-as met de meetkundige plaats gemeen heeft, zullen wij cilinder-coördinaten invoeren door te stellen $x = x\,, y = r \sin \Phi\,, z = r \cos \Phi$, zoodat (10) overgaat in

$$(\alpha^2 + d\,x)\,r^4 + d\,x^3\,r^2 + x^2\,r^2(\beta^2 \sin^2 \Phi + \gamma^2 \cos^2 \Phi) +$$
$$+ 2\,x\,r^3(\zeta \sin \Phi + \eta \cos \Phi) = 0\,,$$

waarvan het eerste lid gedeeld moet worden door $(x^2 + r^2)\,r^2$.

Stellen wij nu $r = 0$, dan gaat de vergelijking over in

$$d\,x + \beta^2 \sin^2 \Phi + \gamma^2 \cos^2 \Phi = 0.$$

Bijgevolg. *Alleen die punten van de X-as liggen op de meetkundige plaats, welke tot het zwaartepunt afstanden hebben gelegen tusschen* $-\dfrac{\beta^2}{d}$ *en* $-\dfrac{\gamma^2}{d}$.

3°. De doorsnede van de meetkundige plaats met een vlak door de X-as, dat een hoek Φ met het XZ-vlak maakt, wordt gevonden door in (10) $y = z \sin \Phi$ en $z = z \cos \Phi$ te stellen, zoodat de deeler van de vergelijking $(x^2 + z^2)\,z^2$ wordt.

Men vindt, met weglaten van den factor z^2,

$$(\alpha^2 + d\,x)\,z^2 + d\,x^3 + x^2(\beta^2 \sin^2 \Phi + \gamma^2 \cos^2 \Phi) +$$
$$+ 2\,x\,z\,(\zeta \sin \Phi + \eta \cos \Phi) = 0.$$

Voeren wij nu poolcoördinaten in, door $-x = \rho \cos \theta$,

$z = \rho \sin\theta$ te stellen, dan vinden wij, met weglating van den factor ρ^2,

$$(\alpha^2 - d\rho\cos\theta)\sin^2\theta - d\rho\cos^3\theta + \cos^2\theta.(\beta^2\sin^2\Phi + \\ + \gamma^2\cos^2\Phi) - 2\sin\theta.\cos\theta.(\zeta\sin\Phi + \eta\cos\Phi) = 0\,,$$

welke als volgt kan geschreven worden

$$\rho = \frac{\frac{\alpha^2}{d}}{\cos\theta} + \left(\frac{\beta^2}{d}\sin^2\Phi + \frac{\gamma^2}{d}\cos^2\Phi - \frac{\alpha^2}{d}\right)\cos\theta - 2\frac{\zeta\sin\Phi + \eta\cos\Phi}{d}\sin\theta. \quad (11)$$

Deze kromme is van conchoïdalen aard en heeft de lijn $x = \frac{\alpha^2}{d}$, waar haar vlak het asymptotisch vlak snijdt, tot asymptoot.

Is α de grootste van de drie traagheidsstralen α, β, γ, dan ligt voor elke waarde van Φ deze kromme, en dus ook het oppervlak, aan denzelfden kant van het asymptotisch vlak, en wel naar den kant van het zwaartepunt.

Is α de kleinste der drie traagheidsstralen, dan ligt de meetkundige plaats geheel aan de andere zijde van het asymptotisch vlak.

Is eindelijk α de middelste in grootte, dan bestaat er een waarde Φ_1 voor Φ, die $\beta^2\sin^2\Phi + \gamma^2\cos^2\Phi - \alpha^2$ gelijk nul maakt, zoodat de doorsnede in dat geval wordt

$$\rho = \frac{\frac{\alpha^2}{d}}{\cos\theta} - 2\frac{\zeta\sin\Phi_1 + \eta\cos\Phi_1}{d}\sin\theta.$$

Maken wij nu ook de vergelijking op van de doorsnede der traagheidsellipsoïde met dit vlak

$$\alpha^2 x^2 + (\beta^2\sin^2\Phi_1 + \gamma^2\cos^2\Phi_1)z^2 - 2xz(\eta\cos\Phi_1 + \zeta\sin\Phi_1) = 1\,,$$

dan blijkt, dat $\eta\cos\Phi_1 + \zeta\sin\Phi_1$ alleen dan nul is, ingeval deze doorsnede een der centrale cirkeldoorsneden van de traagheidsellipsoïde is.

Ligt dus het ophangpunt in een der centrale cirkeldoorsneden van de traagheidsellipsoïde, dan wordt de meetkundige plaats door dit vlak gesneden volgens de lijn $x = \frac{\alpha^2}{d}$, waarin haar vlak het asymptotisch vlak snijdt.

Ligt het ophangpunt niet in een der centrale cirkeldoorsneden van de traagheidsellipsoïde, dan zal geen enkel vlak,

dat door de X-as gaat, de meetkundige plaats volgens eene rechte lijn snijden.

De meetkundige plaats zelve bestaat uit twee deelen, die hetzelfde asymptotisch vlak hebben en aan weerskanten er van gelegen zijn.

4°. Is $\beta = \gamma$, ligt dus het ophangpunt in de loodlijn op eene der centrale cirkeldoorsneden van de traagheidsellipsoïde, dan wordt (10) van den derden graad, omdat nu door den factor $y^2 + z^2$ kan gedeeld worden. Men vindt

$$d\,x\,(x^2 + y^2 + z^2) + (\beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 + \alpha^2 z^2) + 2\,x\,(\zeta y + \eta z) = 0.$$

Het oppervlak is niet van omwenteling, tenzij beide centrale cirkeldoorsneden samenvallen, en de traagheidsellipsoïde zelve van omwenteling is met de X-as tot as.

De X-as snijdt dit oppervlak slechts in één punt, op den afstand $-\dfrac{\beta^2}{d}$ van het zwaartepunt gelegen.

5°. Is $\alpha = \beta = \gamma$, dan gaat (10) over in $x = -\dfrac{\alpha^2}{d}$. De meetkundige plaats is dan een plat vlak; wat ook meetkundig duidelijk is, daar zij de figuur is, welke ontstaat bij transformatie van een bol door wederkeerige voerstralen, met de pool op den bol.

6. Wij kunnen ons nu de meetkundige plaats op de volgende wijze voorstellen, daarbij kortheidshalve de X-as, die door het zwaartepunt en het ophangpunt bepaald wordt, de as noemende.

Verder is α de traagheidsstraal van het lichaam ten opzichte van de as, en zijn β en γ de traagheidsstralen ten opzichte van de beide assen der centrale doorsnede van de traagheidsellipsoïde, loodrecht op de as aangebracht, en is eindelijk d de afstand van het ophangpunt tot het zwaartepunt.

Het oppervlak strekt zich slechts aan één kant van het vlak (β, γ) *uit, namelijk aan die, waar het ophangpunt niet gelegen is.*

Het vlak, dat op een afstand $\dfrac{\alpha^2}{d}$ *van het zwaartepunt loodop de as staat, is een asymptotisch vlak.*

Elke doorsnede met een vlak door de as gaande is van con-

choïdalen aard; zij heeft de snijlijn van haar vlak met het asymptotisch vlak tot asymptoot, terwijl haar snijpunt met de as (haar top) op den afstand $\frac{\beta^2}{d}\sin^2\phi + \frac{\gamma^2}{d}\cos^2\phi$ *van het zwaartepunt is gelegen, waar* ϕ *de hoek is tusschen het vlak van doorsnede en het vlak* (α, γ). *Die afstand verandert dus van* $\frac{\beta^2}{d}$ *tot* $\frac{\gamma^2}{d}$. *Elke top is ook de top eener tweede doorsnede, uitgezonderd de uiterste toppen; zoodat elk vlak, door een der toppen gebracht, loodrecht op de as, in dien top een dubbelpunt heeft.*

Is α *de grootste van de drie traagheidsstralen* α, β, γ, *dan ligt dus het oppervlak geheel tusschen het zwaartepunt en het asymptotisch vlak; is* α *de kleinste van de drie, dan geheel aan de tegengestelde zijde; is* α *echter de middelste van de drie, dan bestaat het oppervlak uit twee deelen, die zich ter weerszijde van het asymtotisch vlak uitstrekken, het eene tot op een afstand* $\frac{\beta^2-\alpha^2}{d}$, *het andere tot op een afstand* $\frac{\alpha^2-\gamma^2}{d}$. *Alleen wanneer het ophangpunt in eene der centrale cirkeldoorsneden van de traagheidsellipsoïde is gelegen, zal de snijlijn van die doorsnede met het asymptotisch vlak tot het oppervlak behooren, en als 't ware den overgang vormen van 't eene deel tot het andere.*

7. Wij gaan nu over tot het beschouwen van eenige bijzondere gevallen.

Eerste geval.

Het ophangpunt ligt op een der assen van de traagheidsellipsoïde.

De vergelijking (10) van de meetkundige plaats wordt nu, als wij door d deelen en de X-as in tegengestelde richting nemen,

$$\left(\frac{a^2}{d}-x\right)(y^2+z^2)^2+\left\{\left(\frac{b^2}{d}-x\right)y^2+\left(\frac{c^2}{d}-x\right)z^2\right\}x^2=0. \quad (12)$$

In overeenstemming met de uitkomsten bij het algemeen onderzoek gevonden ligt het oppervlak ingesloten tusschen het asymptotisch vlak $x=\frac{a^2}{d}$ en het raakvlak $x=\frac{c^2}{d}$, in-

geval a de grootste of de kleinste van de drie hoofdtraagheidsstralen is; is a de middelste van de drie, dan ligt het oppervlak tusschen de raakvlakken $x = \frac{b^2}{d}$ en $x = \frac{c^2}{d}$, en bestaat het uit twee deelen, ieder met het vlak $x = \frac{a^2}{d}$ tot asymptotisch vlak.

Beschouwen die gevallen afzonderlijk.

8. $a < b < c$.

De vergelijking (11) van de doorsnede van het oppervlak met een vlak door de X-as, dat een hoek φ maakt met het XZ-vlak, is hier

$$\rho = \frac{\frac{a^2}{d}}{\cos\theta} + \left(\frac{b^2 - a^2}{d} + \frac{c^2 - b^2}{d} \cos^2\varphi\right) \cos\theta.$$

In fig. I zijn er drie geteekend, C D′ voor $\varphi = 0$, B B′ voor $\varphi = 90°$ en K K′ voor φ tusschen 0° en 90°. Zij zijn in het XZ-vlak, als vlak van teekening, neergeslagen, evenals de hoek φ.

$$\mathrm{O\,A} = \frac{a^2}{d},\quad \mathrm{O\,B} = \frac{b^2}{d},\quad \mathrm{O\,C} = \frac{c^2}{d},\quad \text{dus}\quad \frac{b^2 - a^2}{d} = \mathrm{A\,B},$$

$\frac{c^2 - b^2}{d} = \mathrm{B\,C}$, en $\frac{c^2 - b^2}{d} \cos^2\varphi = \mathrm{B\,C} \cos^2\varphi = \mathrm{B\,K}$, als K het voetpunt is van de loodlijn uit het snijpunt M van het neergeslagen been van hoek φ met den cirkel op B C als middellijn beschreven, neergelaten op de X-as.

Door elk punt K van de X-as, tusschen B en C gelegen, gaan twee congruente doorsneden, symmetrisch gelegen ten opzichte van het vlak van teekening. Eene doorsnede door K loodrecht op de as zal dus eene kromme geven met K als dubbelpunt. Wordt de doorsnede tusschen A en B genomen, dan ligt geen harer punten op de X-as.

9. De vergelijking van zulk eene doorsnede wordt gevonden, als in (12) x O K wordt gesteld. Wij vinden

$$(\mathrm{O\,A} - \mathrm{O\,K})(y^2 + z^2)^2 + \{(\mathrm{O\,B} - \mathrm{O\,K})y^2 + (\mathrm{O\,C} - \mathrm{O\,K})z^2\}x^2 = 0.$$

Nemen wij nu de richting van O naar K als de positieve aan, en duiden wij die aan door de volgorde der letters,

dan kan deze vergelijking op de volgende wijze geschreven worden, als K op B C ligt,

$$\overline{AK}\,(y^2+z^2)^2 = (\overline{KC}.\,z^2 - \overline{BK}.\,y^2)\,\overline{OK}^2; \quad . . (13)$$

als K op A B ligt in het punt K_1,

$$\overline{AK_1}\,(y^2+z^2)^2 = (\overline{K_1C}.\,z^2 + \overline{K_1B}.\,y^2)\,\overline{OK}_1^2. \quad . . (14)$$

Beide stellen de vergelijking eener voetpuntslijn over, (13) van een hyperbool, (14) van eene ellips.

Is toch

$$a\,x^2 + b\,y^2 = 1$$

de vergelijking eener kegelsnede, dan is die van de voetpuntslijn, met het middelpunt als centrum

$$(x^2+y^2)^2 = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}.$$

Wij zien dus, dat (13) de voetpuntslijn is van de *hyperbool*,

$$\frac{z^2}{\frac{KC}{AK}.\,OK^2} - \frac{y^2}{\frac{BK}{AK}.\,OK^2} = 1,$$

en (14) die van de *ellips*

$$\frac{z^2}{\frac{K_1C}{AK_1}\,OK_1^2} + \frac{y^2}{\frac{K_1B}{AK_1}\,OK_1^2} = 1.$$

In de figuur zijn van de hyperbool slechts de assen geconstrueerd, niet de overkomstige voetpuntslijn; de constructie er van zal gegeven worden in fig. 3. De bestaanbare halve as is K D, de onbestaanbare halve as, neergeslagen in het vlak van teekening, is K E. De bepaling er van berust op de volgende beschouwing

$\frac{KC}{AK} = \frac{CL^2}{AL^2} = tg^2\,CAL$, dus $KD = OK\,tg\,CAL$. De lijn O D, uit O evenwijdig met A L getrokken, treft K L in den top D van de hyperbool.

Verder is de verhouding van K D tot K E gelijk aan

$\sqrt{\frac{KC}{BK}} = \frac{MC}{MB} = tg\,\Phi$, zoodat de loodlijn K F op C M neergelaten een asymptoot is, waardoor tevens het punt E bekend is.

De halve assen van de ellips zijn $K_1 D_1$ en $K_1 E_1$. Zij zijn op de volgende wijze gevonden.

$$\frac{K_1 C}{A K_1} = \frac{C L_1^2}{A L_1^2} = tg^2\, C A L_1, \text{ en } \frac{K_1 B}{A K_1} = tg^2\, B A M_1, \text{ dus}$$

$K_1 D_1 = O K_1\, tg\, C A L_1$ en $K_1 E_1 = O K_1\, tg\, B A M_1$. De lijn $O D_1$ evenwijdig met $A L_1$, geeft in het snijpunt met $K_1 L_1$ den top D_1, de lijn $O E$ evenwijdig met $A M_1$, snijdt van $K_1 L_1$ een stuk $K_1 E$ af gelijk aan de halve neergeslagen as.

10. De voetpuntslijn van de hyperbool is in fig. 3 op de volgende wijze geconstrueerd [1]).

$K D_1$ is de halve bestaanbare as, $K L$ een der asymptoten, dus $K O' = K O$ de halve onbestaanbare as. Wordt nu $O' M$ evenwijdig aan de asymptoot $K L$ getrokken ($O D \parallel K L$ is reeds getrokken), dan zal de hyperbool volgens de bekende stelling van Mac Laurin beschreven worden door het veranderlijke hoekpunt p van den driehoek $p\,q\,r$, waarvan de zijde $p\,q$ door D, de zijde $p\,r$ door D', den tweeden top der hyperbool, en de derde zijde $q\,r$ door het punt gaat, dat op oneindigen afstand in de richting van de onbestaanbare as ligt, terwijl de hoekpunten q en r langs $O D_1$ en $O' M$ glijden. Met behulp van den zeshoek van Pascal kan nu gemakkelijk bewezen worden, dat de raaklijn in het punt p van de hyperbool de zijde $q\,r$ middendoor deelt, en dus gaat door het snijpunt s van de asymptoot en $q\,r$. De loodlijn, uit K op $p\,s$ neergelaten, geeft in haar voetpunt t een punt van de gezochte voetpuntslijn.

Een paar opmerkingen mogen hier nog volgen.

Aangezien de raaklijnen aan de voetpuntslijn in het dubbelpunt samenvallen met de asymptoten, en deze een hoek $90° - \Phi$ met het $X\,Z$-vlak maken, zien wij

De hoeken, die de raaklijnen in het dubbelpunt van de doorsnede loodrecht op de X-as met het X Z-vlak maken, zijn de complementen van de hoeken, welke de raaklijnen aan de conchoidale doorsneden in dat punt met dat vlak maken.

1) De aanwijzing van de volgende eenvoudige en fraaie constructie heb ik te te danken aan mijn hooggeschatten vriend A. N. Godefroy.

Laten wij de loodrechte doorsnede van C naar B (fig. I) bewegen, dan zien wij, dat de beide strikken, waaruit ze bestaat, steeds langer en breeder worden. In het midden van B C is ze een *Lemniscaat van* BERNOUILLI, omdat de hyperbool daar *gelijkzijdig* is, en bij B zelve gaan de beide strikken over in twee *cirkels*, die elkaar in B raken.

11. De voetpuntslijn van de ellips is in fig. I op de volgende wijze geconstrueerd.

Volgens de stelling van MAC LAURIN wordt de ellips beschreven door het vrije hoekpunt p van den veranderlijken driehoek $p\,q\,r$, welks zijde $p\,q$ door D_1, $p\,r$ door D'_1 (den top tegenover D_1 gelegen) en $q\,r$ door het punt, dat in de richting van de kleine as in 't oneindige ligt, terwijl de hoekpunten q en r zich bewegen over de vaste lijnen $E_1\,D_1$ en $E_1\,D'_1$. Volgens de stelling van PASCAL zal de raaklijn aan de ellips in het punt p de zijde $q\,r$ middendoor deelen in s, zoodat de voet t van de loodlijn, uit K_1 op $p\,s$ neergelaten, een punt van de voetpuntlijn zal wezen.

Beweegt zich de doorsnede van B naar A, dan zal de ellips steeds grootere afmetingen aannemen, dus ook de doorsnede zelve. Is bij B de groote as iets grooter dan de middellijn der cirkels, die de doorsnede in B vormen, terwijl de kleine as zeer klein is, bij de beweging naar A zullen beide assen steeds onbepaald aangroeien, en in A zelve oneindig groot worden. De overeenkomstige veranderingen van de voetpuntslijn zijn nu gemakkelijk in te zien.

Voor het geval $c < b < a$ blijven de constructies volmaakt dezelfde. Had het oppervlak in het eerste geval zijne bolle zijde naar 't zwaartepunt gekeerd, nu zal dit het geval zijn met de holle zijde.

12. $c > a > b$.

De vergelijking (11) van de conchoidale doorsnede kan nu op de volgende wijze geschreven worden.

$$\rho = \frac{\frac{a^2}{d}}{\cos\theta} + \left\{ -\frac{a^2 - b^2}{d} + \frac{c^2 - b^2}{d}\cos^2\Phi \right\} \cos\theta.$$

In fig. 2 zijn vijf doorsneden geteekend, C C′ voor $\Phi = 0$, B B′ voor $\Phi = 90°$, A A′ voor Φ_0, gegeven door

$cos^2 \Phi_0 = \frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2}$, dus de beide doorsneden van het asymptotisch vlak met de centrale cirkeldoorsneden van de traagheidsellipsoïde. Immers, de vergelijking van de ellips, volgens welke de ellipsoïde door het YZ-vlak gesneden wordt, is

$$b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1.$$

Als nu de voerstraal $\frac{1}{a}$ met de Z-as een hoek θ maakt, dan is $y = \frac{sin\, \theta}{a}$, $z = \frac{cos\, \theta}{a}$, dus $b^2\, sin^2\, \theta + c^2\, cos^2\, \theta = a^2$, waaruit volgt

$$cos^2\, \theta = \frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2} = cos^2\, \Phi_0.$$

Dit bevestigt het gezegde in het slot van § 6.

Verder nog zijn geteekend de doorsneden K K′ voor $\Phi_0 > \Phi > 0$, en $K_1\, K'_1$ voor $\Phi_0 < \Phi < \frac{\pi}{2}$.

Ter verklaring van de wijze, waarop de constructie is verricht, zij alleen opgemerkt, dat $\frac{a^2}{d} = 0\,A$, $\frac{b^2}{d} = 0\,B$, $\frac{c^2}{d} = 0\,C$ genomen zijn, zoodat $\frac{c^2 - b^2}{d}\, cos^2\, \Phi = B\,C\, cos^2\, \Phi = B\,K$ is, als K het voetpunt is van de loodlijn, op B C neergelaten uit het punt L, waar het neergeslagen been van hoek Φ den cirkel snijdt, op B C als middellijn beschreven. Daaruit volgt, dat $- \frac{a^2 - b^2}{d} + \frac{c^2 - b^2}{d}\, cos^2\, \Phi = A\,K$ is, zoodat nu de verdere constructie van K K′ gemakkelijk uit de figuur is af te lezen.

13. De doorsnede van het oppervlak met een vlak loodrecht op de X-as op een afstand O X van het zwaartepunt wordt gevonden, door in (12) $x = O\,K$ te stellen.

Wij vinden dan (13) terug; voor het geval, dat K tusschen A en C in ligt, laten wij die onveranderd. De doorsnede is weer de voetpuntslijn van de hyperbool, waarvan K D de halve bestaanbare, K E de neergeslagen onbestaanbare halve as is.

Valt K met A samen, dan geeft (13)

$$\overline{\mathrm{A\,C}}.z^2 - \overline{\mathrm{B\,A}}.y^2 = 0,$$

de vergelijking van bovengenoemde rechte lijnen.

Valt eindelijk K tusschen A en B, in K_1 bij voorbeeld, dan schrijven wij (13) als volgt

$$\overline{\mathrm{K_1\,A}}.(y^2 + z^2)^2 = (\overline{\mathrm{B\,K_1}}.y^2 - \overline{\mathrm{K_1\,C}}.z^2)\,\overline{\mathrm{O\,C}}_1^2 \ldots (15)$$

De doorsnede is nu de voetpuntslijn van de hyperbool, voorgesteld door

$$\frac{y^2}{\frac{\mathrm{B\,K_1}}{\mathrm{K_1\,A}}.\ \mathrm{O\,K}_1^2} - \frac{z^2}{\frac{\mathrm{K_1\,C}}{\mathrm{K_1\,A}}.\ \mathrm{O\,K}_1^2} = 1.$$

Deze hyperbool heeft dus de bestaanbare as volgens de Y-as, en de onbestaanbare volgens de Z-as, zoodat zij op het $X\,Z$-vlak neergeslagen eene voetpuntslijn zal geven, waarvan de lengte-as volgens de X-as valt.

Doch als we de voetpuntslijn eerst van uit haren werkelijken stand *om* de Y-as neerslaan op het $X\,Y$-vlak, en dit daarna *om* de X-as op het vlak van teekening, dan zal de voetpuntslijn weer dezelfde ligging verkrijgen als in het vorige geval.

Deze wijze van neerslaan komt echter hierop neer, dat de Y-as met de Z-as verwisseld wordt, zoodat wat bij de doorsnede in het punt K, toen dit tusschen A en C gelegen was, K C was, nu B K_1 wordt, en wat A K was nu overgaat in K_1 A. Daardoor gaat (15) over in (13), zoodat voor de halve assen van de hyperbool gevonden worden $K_1\,D_1$ en K_1 E.

Hieruit blijkt, dat wanneer het punt K, waarin het vlak van doorsnede de X-as loodrecht snijdt, zich van uit A naar B of naar C beweegt, de doorsnede, die in A uit twee rechte lijnen bestaat, zal overgaan in eene lemniscaatvormige kromme, waarvan de as, die bij A zeer lang is, steeds korter wordt, terwijl de hoek tusschen de raaklijnen in het dubbelpunt steeds grooter wordt. In C en B eindelijk herleidt zich de doorsnede tot een punt.

14. Tweede geval.

De traagheidsellipsoïde is van omwenteling, het ophangpunt ligt in den aequator.

Nu moet in (10) $\alpha = \beta = a$ gesteld worden, en $\zeta = \eta = 0$. Deelen wij weder door d en nemen we de X-as in tegengestelde richting, dan kunnen wij het oppervlak op de volgende wijze in vergelijking brengen

$$\left(\frac{a^2}{d} - x\right)(y^2 + z^2)^2 + \left\{\left(\frac{a^2}{d} - x\right)y^2 + \left(\frac{c^2}{d} - x\right)z^2\right\} x^2 = 0. \quad (16)$$

Het oppervlak ligt nu tusschen het asymptotisch vlak $x = \frac{a^2}{d}$ en het raakvlak $x = \frac{c^2}{d}$.

De vergelijking (11) van de doorsnede met een vlak door de X-as, dat een hoek Φ maakt met het XZ-vlak, gaat nu over in

$$\rho = \frac{\frac{a^2}{d}}{\cos\theta} + \frac{c^2 - a^2}{d} \cos^2\Phi . \cos\theta.$$

In fig. 3 zijn vier doorsneden geteekend, neergeslagen in het XZ-vlak, ingeval $c > a$ is; de eerste C D′ voor $\Phi = 0$, de laatste A A′ voor $\Phi = 90°$. Deze is de rechte lijn, waarin de aequator het asymptotisch vlak snijdt.

15. De vergelijking van eene doorsnede met een vlak loodrecht op de X-as wordt gevonden, door in (16) $x = \mathrm{OK}$ te stellen. Dit geeft

$$(y^2 + z^2)^2 = \left(\frac{\mathrm{KC}}{\mathrm{AK}} z^2 - y^2\right) \overline{\mathrm{OK}}^2.$$

de vergelijking van de voetpuntslijn eener hyperbool, voorgesteld door

$$\frac{z^2}{\frac{\mathrm{KC}}{\mathrm{AK}} . \overline{\mathrm{OK}}^2} - \frac{y^2}{\overline{\mathrm{OK}}^2} = 1.$$

Trekken we O D evenwijdig aan A B, dan is K D de halve bestaanbare, K O′ = K O de halve onbestaanbare as.

De beide strikken van de lemniscaatvormige doorsnede, die bij C zeer kleine afmetingen hebben, worden langer en bij het dubbelpunt spitser, naarmate dit zich van A verwijdert; in het midden van C A is de doorsnede eene *lemniscaat van* Bernouilli, bij A is de strik zeer lang en smal, terwijl ze in A in eene rechte lijn overgaat.

Hoewel de constructies in fig. 3 zijn uitgevoerd in de onderstelling $a < c$, ziet men gemakkelijk in, dat voor $a > c$ die constructies woordelijk doorgaan.

Voor $a < c$ keert het oppervlak in de nabijheid van de X-as zijne holle zijde naar het zwaartepunt, voor $a > c$ zal dit het geval zijn met zijne bolle zijde.

16. Het eerstgenoemde oppervlak geeft het antwoord op de gestelde prijsvraag, als het brandpunt in den aequator wordt aangenomen.

Is
$$\frac{x^2+y^2}{A}+\frac{z^2}{B}=1$$
de vergelijking van de omwentelings-ellipsoïde, waarin $A > B$ wordt ondersteld, dan moet in (16)
$$a^2=b^2=\tfrac{1}{5}(A+B),$$
$$c^2=\tfrac{2}{5}A$$
gesteld worden, zoodat in fig. 3
$$\mathrm{O\,A}=\frac{1}{5}\frac{A+B}{\sqrt{A-B}},$$
$$\mathrm{O\,C}=\frac{2}{5}\frac{A}{\sqrt{A-B}},$$
moet genomen worden.

17. Derde geval.

De traagheidsellipsoïde is van omwenteling, het ophangpunt ligt op de as.

Nu moet in (10) $\beta=\gamma=b$ en $\zeta=\eta=0$, zoodat het oppervlak voorgesteld wordt door
$$\left(\frac{a^2}{d}-x\right)(y^2+z^2)+\left(\frac{b^2}{d}-x\right)x^2=0, \quad \ldots\ldots (17)$$
als de X-as in tegengestelde richting genomen wordt.

Het oppervlak is van omwenteling en ligt geheel tusschen het asymptotisch vlak $x=\frac{a^2}{d}$ en het raakvlak $x=\frac{b^2}{d}$.

De beschrijvende lijn heeft tot vergelijking
$$\rho=\frac{\frac{a^2}{d}}{\cos\theta}+\frac{b^2-a^2}{d}\cos\theta,$$
waarin nu (11) overgaat.

Zij is in fig. 4 geteekend in de onderstelling $a < b$, in fig. 5 voor $a > b$.

De constructie er van verschilt alleen hierin van die der conchoide van NICOMEDES, dat op den voerstraal, van uit zijn snijpunt met de rechte lijn, geen stuk van standvastige lengte wordt uitgezet, maar een, dat evenredig is met de sinus van den hoek tusschen voerstraal en asymptoot

Het oppervlak, in fig. 5 voorgesteld, geeft het antwoord op de gestelde prijsvraag, voor het geval, dat het brandpunt op de as van de omwentelingsellipsoïde wordt genomen.

Is

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2 + z^2}{B} = 1$$

de vergelijking van de ellipsoïde, waar $A > B$ wordt ondersteld, dan moet in (17)

$$a^2 = \tfrac{2}{5} B,$$
$$b^2 = c^2 = \tfrac{1}{5}(A + B),$$
$$d = \sqrt{A - B},$$

gesteld worden, zoodat in fig. 5

$$\mathrm{O\,A} = \frac{2}{5} \frac{B}{\sqrt{A - B}}$$

$$\mathrm{O\,B} = \frac{1}{5} \frac{A + B}{\sqrt{A - B}},$$

moet genomen worden.

PRIJSVRAAG N°. 7 VOOR HET JAAR 1889,

OPGELOST DOOR

Dr. G. SCHOUTEN.

Indien men bij centrale beweging, na de snelheid ontbonden te hebben volgens den voerstraal en loodrecht er op, de overeenkomstige uitdrukkingen voor de levende kracht vormt, blijkt het dat deze laatste, zoomede hare verhouding voor verschillende punten der baan, merkwaardige wetten volgen. Men verlangt hieromtrent een nader onderzoek voor centrale krachten van den vorm $A\,r^n$.

1. Wordt de plaats van het bewegende punt als gewoonlijk bepaald door de lengte r van zijn voerstraal en den hoek θ, dien deze met eene vaste lijn in het vlak van de baan maakt, dan is de levende kracht L_θ van de ontbondene der beweging loodrecht op den voerstraal gelijk aan $\frac{1}{2}\,m\left(r\,\frac{d\,\theta}{d\,t}\right)^2$, m de massa van 't punt zijnde, of ook, omdat $r^2\,\frac{d\,\theta}{d\,t}$ het dubbele van de *sectorsnelheid* der beweging voorstelt,

$$L_\theta = \tfrac{1}{2}\,m\,\frac{C^2}{r^2}, \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

waar $\frac{1}{2}\,C$ gelijk de sectorsnelheid is.

De levende kracht L_r van de ontbondene der beweging volgens den voerstraal is

$$L_r = \tfrac{1}{2}\,m\left(\frac{d\,r}{d\,t}\right)^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

De verhouding $\frac{L_r}{L_\theta}$, die wij door x zullen voorstellen, is

cot^2 (r, s), waar (r, s) de hoek tusschen den voerstraal en de baan of de *steilte* der baan is. Dus

$$\varkappa = cot^2\,(r, s) \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

2. Uit (1) volgt, dat L_θ *omgekeerd-evenredig is met de tweedemacht van den voerstraal en recht-evenredig met die van de sectorsnelheid.*

De wetten, welke L_r en $\varkappa$ volgen, zullen blijkens (2) en (3) samenhangen met die, welke voor de radiale snelheid en de steilte der baan gelden.

Onder de verhandelingen, waarin de eigenschappen der centrale beweging zijn ontwikkeld, is er eene, die om de methode daarin gevolgd bij ons onderzoek ten grondslag zal gelegd worden, namelijk

»*De regel voor den baanvorm en de eigenschappen der centrale beweging graphisch toegelicht door* Dr. G. SCHOUTEN" [1]).

De daarin gevolgde graphische methode toch geeft een bijzonder helder inzicht in de verschillende eigenschappen der centrale beweging [2]), en het zal blijken, dat ook de veranderingen, die onze grootheden L_θ, L_r en $\varkappa$ gedurende de beweging ondergaan, op even eenvoudige wijze uit eene figuur kunnen worden afgelezen, als dit in bovengenoemde verhandeling.'t geval is met de overige eigenschappen.

Onder verwijzing dus naar die verhandeling en met gebruikmaking van de aldaar ingevoerde notaties, zullen we ons onderzoek instellen.

Alleen moge hier de grondslag, waarop de graphische methode berust, kort in herinnering gebracht worden.

3. Laat de massa van het bewegende punt gelijk aan de eenheid genomen worden en F de kracht zijn, die op het punt werkt, en die positief aangenomen wordt, als ze *afstootend* werkt; dan is $U = {}_{\infty}\!\!\int F d r$ de *krachtfunctie*. Wordt nu (Fig. 1) op een rechthoekig coördinatenstelsel $\frac{1}{r^2}$ tot abscis x, en U tot bijbehoorende ordinaat y genomen, dan is

$$y = U$$

1) Verslagen en mededeelingen der Kon. Akad. van Wetenschappen, Afd. Natuurkunde, 3e reeks, Deel V.

2) Zie: Verslag over bovengenoemde verhandeling uitgebracht in de Vergadering van 28 Januari 1888.

de vergelijking eener kromme, die geheel bepaald is door de krachtenwet, en de *potentiaal-kromme* genoemd wordt.

Wordt nu in die figuur eene rechte lijn getrokken, die met elke der positieve coördinatenassen een scherpen hoek maakt, stel een hoek Φ met de abscissen-as, dan zullen alle punten der potentiaal-kromme, wier ordinaten grooter zijn dan de overeenkomstige van de rechte lijn, of die boven deze gelegen zijn, in hunne abscissen de afstanden aangeven, op welke de beweging mogelijk is, die plaats grijpt met eene *sectorsnelheid* $\frac{1}{2} C$ bepaald door

$$\tfrac{1}{2} C^2 = tg\, \Phi,$$

en met eene *totale energie*, bepaald door het snijpunt van de rechte lijn met de ordinaten-as. Valt dit snijpunt samen met dat van de potentiaalkromme en deze as, dan is de totale energie gelijk aan die der kracht; ligt het er boven of onder, dan is het bedrag der totale energie zooveel minder of meer dan dat der beweegkracht, als door dien afstand wordt aangegeven.

De rechte lijn wordt *sectorlijn* genoemd.

Op elken afstand wordt de levende kracht L van het bewegende punt aangewezen door de loodlijn A C, uit het overeenkomstige punt der potentiaalkromme neergelaten op de lijn P Q, uit het snijpunt P van sectorlijn en ordinaten-as evenwijdig getrokken aan de abscissen-as; en de beide stukken A B en B C, waarin die loodlijn door de sectorlijn wordt verdeeld, stellen respectievelijk L_r en L_θ voor.

Elk snijpunt van sectorlijn en potentiaalkromme geeft dus een apo- of pericentrum van de baan aan, terwijl elke raaklijn aan de potentiaalkromme in haar snijpunt met de ordinaten-as de *totale energie*, in hare helling ten opzichte van de abscissen-as de *sectorsnelheid* aanwijst, waarmede de cirkelbeweging plaats grijpt op den afstand, aangewezen door het raakpunt.

Is verder ψ de hoek A P C, dien de lijn A P met de abscissen-as maakt, dan is

$$sin^2\,(r, s) = \frac{\frac{1}{2} C^2}{tg\, \psi},$$

zoodat

$$\varkappa = \frac{tg\,\psi}{\frac{1}{2}C^2} - 1.$$

De in § 2 genoemde wet voor L_θ volgt onmiddellijk uit driehoek P B C van de figuur. De verandering van L_r wordt gevonden uit die van A B, terwijl die van $\varkappa$ samenhangt met die van ψ.

4. **Eerste geval.**

De kracht $\mu\, r^n$ is afstootend.

Hier is

$$\left.\begin{aligned} U &= \int \mu\, r^n\, d\, r = \frac{\mu}{n+1}\, x^{-\frac{n+1}{2}}, \\ \frac{d\,U}{d\,x} &= -\tfrac{1}{2}\,\mu\, x^{-\frac{n+3}{2}}; \end{aligned}\right\}\ \text{Voor } n \gtrless -1.$$

$$\left.\begin{aligned} U &= \int \mu\, r^{-1}\, d\, r = -\tfrac{1}{2}\,\mu\, l\, x, \\ \frac{d\,U}{d\,x} &= -\tfrac{1}{2}\,\mu \,.\, \frac{1}{x}. \end{aligned}\right\}\ \text{Voor } n = -1.$$

Hieruit blijkt, dat de potentiaalkromme de volgende vormen zal aannemen:

Voor $n > -1$ (Fig. 2): eene kromme, die de positieve assen tot asymptoten heeft. (Voor $n = 1$ is zij eene gelijkzijdige hyperbool).

Voor $n = -1$ (Fig. 3): eene kromme, die de positieve ordinaten-as tot asymptoot heeft; de raaklijn aan het punt $x = \infty$ en $y = -\infty$ is evenwijdig aan de abscissen-as.

Voor $-3 < n < -1$ (Fig. 4): eene kromme, die in den oorsprong door de ordinaten-as geraakt wordt; de raaklijn in het punt $x = \infty$ en $y = -\infty$ loopt evenwijdig aan de abscissen-as. (Voor $n = -2$ is zij eene parabool met de abscissen-as tot as).

Voor $n = -3$ (Fig. 5): eene rechte lijn, die met de abscissen-as een hoek $= -Bg\, tg\, \frac{1}{2}\,\mu$ maakt.

Voor $n < -3$ (Fig. 6): eene kromme, die in den oorsprong geraakt wordt door de abscissen-as; de raaklijn in het punt $x = \infty$ en $y = -\infty$ is evenwijdig aan de ordinaten-as. (Voor $n = -5$ is zij eene parabool met de negatieve ordinaten-as tot as).

5. Uit deze figuren volgt onmiddellijk, dat de baan van het punt een pericentrum heeft in het snijpunt A van sector-

lijn en potentiaalkromme, en zich met een hyperboolvormigen tak naar het oneindige uitstrekt.

De verhouding $\varkappa$, die in het pericentrum gelijk 0 is, zal bij de beweging naar de oneindige ruimte onbepaald aangroeien, daar ψ tot 90° nadert.

Verder zal ook L_r toenemen bij de beweging van het centrum af. In het pericentrum is $L_r = 0$, en groeit onbepaald aan voor $n \geqq -1$, terwijl, voor $n < -1$, L_r tot de grenswaarde $\mathrm{P\,O} = \mathrm{D\,A} + \mathrm{A\,C} = U + L_r = -\frac{\mu}{n+1} r_0^{n+1} + \frac{C^2}{2 r_0^2}$, als r_0 de pericentrum-afstand is.

6. Tweede geval.

De kracht μr^n is aantrekkend.

Wordt in de formules van het voorgaande geval het teeken van μ omgekeerd, dan vinden wij die voor dit geval.

De ordinaten der potentiaalkromme daar gevonden hebben we slechts van teeken te veranderen. Wij vinden dus de volgende vormen:

Voor $n > -1$ (Fig. 7): eene kromme, die de positieve abscissen-as en de negatieve ordinaten-as tot asymptoten heeft. (Voor $n = 1$ is zij eene gelijkzijdige hyperbool).

Voor $n = -1$ (Fig. 8): eene kromme, die alleen de negatieve ordinaten-as tot asymptoot heeft. De raaklijn in het punt $x = \infty$ en $y = \infty$ is evenwijdig aan de abscissen-as.

Voor $-3 < n < -1$ (Fig. 9): eene kromme, die in den oorsprong de ordinaten-as tot raaklijn heeft. De raaklijn aan het punt $x = \infty$ en $y = \infty$ is evenwijdig aan de abscissen-as. (Voor $n = -2$ is zij eene parabool).

Voor $n = -3$ (Fig. 10): eene rechte lijn, die met de abscissen-as een hoek gelijk $Bg\,tg\,\frac{1}{2}\,\mu$ maakt.

Voor $n < -3$ (Fig. 11): eene kromme, die in den oorsprong de abscissen-as tot raaklijn heeft. De raaklijn in het punt $x = \infty$ en $y = \infty$ is evenwijdig met de ordinaten-as.

7. $n \geqq -1$ (Figg. 7 en 8). De baan is P — A, ze heeft dus peri- en apocentra.

$\varkappa$ verkrijgt de grootste waarde in S, het raakpunt van de raaklijn, uit P aan de potentiaalkromme getrokken. Daar

toch heeft ψ de grootste waarde. L_r of A B daarentegen verkrijgt hare grootste waarde in A, het raakpunt van de raaklijn aan de potentiaalkromme, die evenwijdig is aan de sectorlijn.

Het raakpunt S wijst den afstand aan, waarop de cirkelbeweging plaats grijpt met dezelfde totale energie als die, waarmede het punt zich beweegt.

Het raakpunt A geeft den afstand aan, waarop het punt de cirkelbeweging kan hebben, die met dezelfde sectorsnelheid plaats grijpt als waarmede het punt zich beweegt.

Wij vinden dus:

Voor $n \geq -1$ verkrijgt $\varkappa$ eene maximumwaarde ter plaatse, waar de baan de cirkelbaan snijdt, die met dezelfde totale energie als zij beschreven wordt; L_r daarentegen ter plaatse, waar de baan de cirkelbaan snijdt, die met gelijke sectorsnelheid beschreven wordt.

De straal ρ van de eerste cirkelbaan wordt gegeven door

$$\tfrac{1}{2}(F r)_\rho + \int_0^\rho F\,d\,r = \tfrac{1}{2} v^2 + \int_0^r F\,d\,r,$$

waarin $F = \mu\, r^n$ moet gesteld worden. Dan vinden we

$$\rho^{n+1} = \frac{n+1}{\mu\,(n+3)}\,(v^2 + 2\,U) \text{ als } n+1 \gtrless 0 \text{ is,}$$

$$\tfrac{1}{2}\mu + \mu\, l\,\rho = \tfrac{1}{2} v^2 + U \text{ voor } n = -1.$$

De straal ρ van de tweede cirkelbaan wordt gegeven door $\mu\,\rho^{n+3} = C^2$, dus

$$\rho = \left(\frac{C^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{n+3}}.$$

8. $-3 < n < -1$. (Fig. 9).

Zoolang de totale energie van de beweging kleiner is dan die van de beweegkracht, zoolang dus de sectorlijn de positieve ordinaten-as snijdt, zal de baan peri- en apocentra hebben, en zullen voor $\varkappa$ en L_r dezelfde wetten gelden, als die bij $n \geq -1$ gevonden zijn.

Is echter de totale energie van het punt gelijk aan die der beweegkracht, zoodat de sectorlijn door de coördinatenoorsprong gaat, dan is de baan P — P*ar*, heeft dus een pericentrum en strekt zich met paraboolvormigen tak naar de oneindige ruimte uit.

In dit geval zal $\varkappa$ van de waarde 0, die zij in het pericentrum heeft, onbepaald aangroeien onder de beweging naar de oneindige ruimte, terwijl L_r weer eene maximum-waarde zal verkrijgen in het snijpunt van de baan met de cirkelbaan, die met dezelfde sectorsnelheid als zij beschreven wordt.

Is eindelijk de totale energie van 't punt grooter dan die van de beweegkracht, dan is de baan $P-H_y$, heeft dus een pericentrum, terwijl ze zich met een hyperboolvormigen tak naar de oneindige ruimte uitstrekt. Men ziet gemakkelijk in, dat hier voor $\varkappa$ en L_r hetzelfde geldt als in het zooeven besproken geval.

9. $n = -3$. (Fig. 10).

Zoolang de totale energie van het punt kleiner is dan die van de beweegkracht, moet $\Phi < Bg\,tg\,\frac{1}{2}\,\mu$ of $C^2 < \mu$ zijn.

De baan is $^{\infty}S_c - A$, heeft dus een apocentrum en voert langs een spiraal met oneindig veel windingen naar het centrum.

In dit geval zal $\varkappa$ van de waarde 0, die ze in het apocentrum heeft, aangroeien onder de beweging naar het centrum heen, en in het centrum zelf hare grootste waarde $\frac{\mu}{C^2} - 1$ verkrijgen.

L_r daarentegen zal gedurende de beweging van uit het apocentrum naar het centrum van de waarde 0 onbepaald aangroeien tot ∞.

Is de totale energie van het punt gelijk aan die van de beweegkracht, dan is voor $C^2 = \mu$ de beweging overal cirkelvormig en blijven dus $\varkappa$ en L_r voortdurend 0. Voor $C^2 < \mu$ echter is de baan $^{\infty}S_c - {}^{\infty}S_{\infty}$, voert zij dus eenerzijds naar het centrum, anderzijds naar de oneindige ruimte, in beide gevallen langs eene spiraal met oneindig veel windingen.

Daar ψ nu eene standvastige waarde heeft, zal $\varkappa$ over de geheele baan dezelfde waarde hebben, namelijk $\frac{\mu}{C^2} - 1$; L_r daarentegen zal bij de beweging naar het centrum heen onbepaald toenemen, bij de beweging naar de oneindige ruimte onbepaald afnemen.

Overtreft eindelijk de totale energie van 't punt die van de beweegkracht, dan kan $C^2 \gtreqless \mu$ zijn.

Is $C^2 > \mu$, dan is de baan P — H_y, heeft dus een pericentrum en voert met een hyperbolischen tak naar het oneindige.

Gedurende de beweging van uit het pericentrum naar de oneindige ruimte zal $\varkappa$ van de waarde 0 onbepaald aangroeien tot ∞, terwijl L_r echter zal aangroeien van 0 tot $PO = AC - AB = \frac{C^2}{2 r_0^2} - \frac{\mu}{2 r_0^2} = \frac{C^2 - \mu}{2 r_0^2}$, waar r_0 de pericentrum-afstand is.

Is $C^2 = \mu$, dan is de baan ${}^{\infty}S_c - H_y$, voert dus langs een spiraal met oneindig veel windingen naar het centrum en langs een hyperboolvormigen tak naar de oneindige ruimte.

In dit geval zal $\varkappa$ bij de beweging naar de oneindige ruimte onbepaald toenemen, in het centrum is hare waarde $= 0$, op oneindigen afstand ∞.

L_r daarentegen heeft overal dezelfde waarde, namelijk het bedrag, waarmede de totale energie van het punt die van de beweegkracht overtreft.

Voor $C^2 < \mu$ is ook de baan ${}^{\infty}S_c - H_y$; dan heeft $\varkappa$ in het centrum de kleinste waarde $\frac{\mu}{C^2} - 1$, en neemt bij de beweging naar de oneindige ruimte onbepaald toe.

L_r neemt daarentegen gedurende de beweging naar de oneindige ruimte voortdurend af; in het centrum is hare waarde ∞, en op oneindigen afstand heeft zij tot grenswaarde P O, het verschil tusschen de totale energie van het punt en die der beweegkracht.

10. $n < -3$. (Fig. 11).

Is de totale energie van het punt kleiner dan of gelijk aan die der beweegkracht, dan is de baan ${}^{e}S_c - A$, heeft dus een apocentrum en voert langs een spiraal met een eindig aantal windingen naar het centrum. Zoowel $\varkappa$ als L_r zal bij de beweging van uit het apocentrum tot het centrum onbepaald aangroeien van 0 tot ∞.

Overtreft de totale energie van het punt die van de beweegkracht met een bedrag $PO = E$, dan kan het punt eene cirkelbeweging aannemen, die met dezelfde energie als de baan beschreven wordt, en waarvan de straal ρ en de sectorsnelheid $C_\varkappa$ gegeven worden door

$$C_x^2 = \mu \rho^{n+3},$$

$$E = \int_0^\rho \mu r^n dr + \frac{C_x^2}{2\rho^2} - \int_0^\infty \mu r^n dr.$$

De laatste van deze vergelijkingen geeft

$$E = \frac{n+3}{2(n+1)} \mu \rho^{n+1},$$

zoodat

$$\rho = \left(\frac{2(n+1)}{n+3} \frac{E}{\mu}\right)^{\frac{1}{n+1}},$$

$$C_x = \sqrt{\mu} \left(\frac{2(n+1)}{n+3} \frac{E}{\mu}\right)^{\frac{n+3}{2(n+1)}}.$$

Is nu de sectorsnelheid van het punt grooter dan die van deze cirkelbeweging, of $C > C_x$, dan is de baan $\mathrm{P} - \mathrm{H}_y$, heeft dus een pericentrum en voert langs een hyperboolvormigen tak, met een asymptoot, die niet door het centrum gaat, naar de oneindige ruimte.

De verhouding x zal bij de beweging naar de oneindige ruimte onbepaald toenemen; in het pericentrum is hare waarde 0, op oneindigen afstand ∞.

Evenzoo zal L_r van de waarde 0 in het pericentrum voortdurend toenemen tot de grenswaarde $\mathrm{P}\,0 = E$.

Is $C = C_x$, dan is de baan ${}^e\mathrm{S}_c - {}^\infty\mathrm{S}_B$ voor de beweging binnen de cirkelbaan, ${}^\infty\mathrm{S}_b - \mathrm{H}_y^e$ voor die er buiten.

De baan zal dus de cirkelbaan volgens een spiraal met oneindig veel windingen asymptotisch naderen, en anderzijds òf tot het centrum voeren langs een spiraal met een eindig aantal windingen, òf tot de oneindige ruimte langs een hyperboolvormigen tak.

Is nu de cirkelbaan een asymptotische buitencirkel, dan zullen x en L_r alle mogelijke waarden verkrijgen; bij de beweging naar den asymptotischen cirkel nemen zij onbepaald af tot de grenswaarde 0, bij de beweging naar het centrum groeien zij onbepaald aan tot ∞.

Is de cirkelbaan echter een asymptotische binnencirkel, dan ook zullen x en L_r voortdurend afnemen bij de beweging naar dien cirkel en 0 tot grens hebben, terwijl bij de be-

weging naar de oneindige ruimte beide toenemen, $\varkappa$ tot ∞, L_r tot E.

Is eindelijk $C < C_\varkappa$, dan is de baan ${}^e\mathrm{S}_c - \mathrm{H}_y^e$, en voert dus naar het centrum langs een spiraal met een eindig aantal windingen, naar de oneindige ruimte met een hyperbolischen tak.

$\varkappa$ verkrijgt in het snijpunt der baan met de cirkelbaan eene minimumwaarde $\frac{C_\varkappa^2}{C^2} - 1$ en zal bij de beweging zoowel naar het centrum als naar de oneindige ruimte onbepaald aangroeien.

L_r verkrijgt eene minimumwaarde in het snijpunt der baan met de cirkelbaan, die met dezelfde sectorsnelheid wordt beschreven als deze, en wier straal dus gelijk is aan $\left(\frac{C_\varkappa^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{n+3}}$.
Die minimumwaarde wordt gegeven door $\mathrm{P\,O} - \mathrm{P_1\,O} =$
$= E - (\mathrm{A\,C} - \mathrm{A\,B}) = E - \left(\frac{C_\varkappa^2}{2\,\rho^2} - U\rho\right) = E - \left(\frac{C_\varkappa^2}{2\,\rho^2} -\right.$
$\left. - \frac{\mu}{n+1}\,\rho^{n+1}\right)$, of, als voor ρ hare waarde $\left(\frac{C_\varkappa^2}{\mu}\right)^{\frac{1}{n+3}}$ wordt gesteld

$$E - \frac{n-1}{2\,(n+1)}\left(\frac{C_\varkappa{}^{-(n+1)}}{\mu}\right)^{\frac{2}{-(n+3)}}.$$

Bij de beweging naar het centrum heen groeit L_r onbepaald aan tot ∞, bij die naar de oneindige ruimte groeit ze ook voortdurend aan, doch tot de grenswaarde E.

11. Het is nu niet moeilijk de wetten op te sporen, volgens welke $\varkappa$ en L_r veranderen gedurende de beweging onder de werking eener willekeurige kracht.

Fig. 12. Men teekent de potentiaalkromme voor die krachtenwet. Deze zal de ordinaten-as snijden of raken in een punt R op eindigen of oneindigen afstand van den oorsprong gelegen, naar gelang de krachtfunctie voor $r = \infty$ eene eindige of oneindig groote waarde heeft.

Men trekt uit een willekeurig punt P van de ordinaten-as eene lijn, die een willekeurigen scherpen hoek $\Phi = bg\ tg\ \frac{1}{2}\ C^2$ maakt met de abscissen-as.

De beweging, die met de sectorsnelheid $\frac{1}{2}C$ plaats grijpt en met eene totale energie E, die een bedrag P R verschilt met de totale energie van de kracht, en wel zooveel kleiner of grooter is dan deze naar gelang P boven of onder R ligt, zal alleen kunnen plaats grijpen op afstanden, aangegeven door abscissen van de punten der potentiaalkromme, die boven de sectorlijn gelegen zijn.

Trekt men nu uit P alle raaklijnen aan de potentiaalkromme, die boven de sectorlijn gelegen zijn, dan geven de raakpunten in hunne abscissen de afstanden aan, waarop de cirkelbeweging met de totale energie E plaats grijpt. De baan zal al deze cirkelbanen snijden, en in de snijpunten verkrijgt $\varkappa$ eene *maximum-* of *minimum*waarde, naar gelang de cirkelbaan in een *stabiliteits-* of *instabiliteitsgebied* ligt.

Trekt men raaklijnen aan de potentiaalkromme, die evenwijdig aan de sectorlijn loopen en boven deze gelegen zijn, dan vindt men in de abscissen der raakpunten de afstanden, waarop de cirkelbeweging met de sectorsnelheid $\frac{1}{2}C$ plaats grijpt. De baan zal elk dezer cirkelbanen snijden, en in die snijpunten verkrijgt L_r eene *maximum-* of eene *minimum*-waarde, naar gelang de cirkelbaan in een *stabiliteits-* of *instabiliteitsgebied* ligt.

Wij vinden dus algemeen:

L_θ is omgekeerd-evenredig met de tweedemacht van den afstand en recht-evenredig met die van de sectorsnelheid.

$\varkappa$ verkrijgt eene maximum- of eene minimumwaarde in de snijpunten van de baan met de cirkelbanen, die met dezelfde energie als de baan zelve beschreven worden; en wel eene maximum- of eene minimumwaarde, naar gelang de cirkelbaan in een stabiliteits- of instabiliteitsgebied is gelegen.

L_r verkrijgt eene maximum- of eene minimumwaarde ter plaatse, waar de baan de cirkelbanen snijdt, die met dezelfde sectorsnelheid als de baan zelve beschreven worden; en wel eene maximum- of eene minimumwaarde, naar gelang de cirkelbaan in een stabiliteits- of instabiliteitsgebied gelegen is.

NASCHRIFT OP PRIJSVRAAG N° 6,

DOOR

P. H. SCHOUTE.

Nader onderzoek der algemeene vergelijking

$$a^2(p R^2 - x S)^2 + b^2(q R^2 - y S)^2 + c^2(r R^2 - z S)^2 =$$
$$= R^2 S \{S^2 - (p^2 + q^2 + r^2) R^2\},$$

waarin

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 \text{ en } S = p x + q y + r z \text{ is.}$$

1. Het eerste lid der vergelijking is homogeen van den vierden graad, het tweede homogeen van den vijfden. Dus kan de vergelijking in de gedaante $u_4 = u_5$ gedacht worden. Het oppervlak is van den vijfden graad en heeft in den oorsprong O een viervoudig punt. Elke lijn door O snijdt het oppervlak behalve in O nog in een enkel punt (het slingerpunt behoorende bij de as door P loodrecht op dien voerstraal); alleen bij de beschrijvende lijnen van den osculatiekegel $u_4 = 0$ van het oppervlak in O moet dit vijfde punt met O samenvallen.

2. Het oppervlak gaat door de twintig gemeenschappelijke beschrijvende lijnen der kegels $u_4 = 0$ en $u_5 = 0$. Of ruimer opgevat, het oppervlak behoort tot den bundel van den vijfden graad $C u_4 + \lambda u_5 = 0$, bepaald door de twee oppervlakken $C u_4 = 0$ en $u_5 = 0$, waarvan het eerste beschouwd moet worden te bestaan uit den kegel $u_4 = 0$ en het vlak in het oneindige $C = 0$. Van dezen bundel bestaat de basis uit de twintig gemeenschappelijke beschrijvende lijnen van $u_4 = 0$ en $u_5 = 0$ en de vlakke kromme van den vijfden graad, die de doorsnee is van $u_5 = 0$ met het vlak in het

oneindige. Behalve dat het oppervlak de twintig rechte lijnen bevat, blijkt hieruit, dat het met den kegel $u_5 = 0$ de oneindig ver gelegen punten gemeen heeft.

3. De kegel $u_4 = 0$ bevat drie dubbellijnen, de lijn O P met de vergelijkingen $\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$ en de snijlijnen van het vlak $p x + q y + r z = 0$ loodrecht op O P met den puntbol O, met de vergelijking $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, — dat wil zeggen de door O gaande isotrope lijnen van dit vlak.

De eerste dubbellijn treedt het duidelijkst te voorschijn in den vorm

$$u_4 \equiv a^2 \{y(py - qx) - z(rx - pz)\}^2 + b^2 \{z(qz - ry) - x(py - qx)\}^2 + c^2 \{x(rx - pz) - y(qz - ry)\}^2.$$

Want voor $\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$ bevat elk der drie termen twee factoren nul. En de beide andere dubbellijnen vertoonen zich, als men u_4 in den vorm

$$(a^2 p^2 + b^2 q^2 + c^2 r^2) R^4 - 2(a^2 p x + b^2 q y + c^2 r z) R^2 S + + (a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) S^2$$

schrijft, wijl elk der drie termen bij het nul stellen van R^2 en S eveneens twee factoren nul bevat.

Wijl de kegel $u_4 = 0$ drie dubbellijnen heeft, is hij unicursaal. Omdat u_4 de som is van drie kwadraten, is echter van dezen kegel alleen de dubbellijn O P bestaanbaar; dus is O P een afzonderlijke lijn voor het verder geheel onbestaanbare kegelvlak. Wijl slingerpunt en zwaartepunt van een massief lichaam niet samenvallen kunnen, was het trouwens te voorzien, dat geen enkelvoudige beschrijvende lijn van $u_4 = 0$ bestaanbaar zijn kan.

4. De kegel $u_5 = 0$ splitst zich in $p x + q y + r z = 0$ (het vlak door O loodrecht op O P), den puntbol O en den zich tot zijn as herleid hebbenden omwentelings-cylinder $S^2 - (p^2 + q^2 + r^2) R^2 = 0$. Deze cylinder blijkt een omwentelings-lichaam te zijn, als men O P en twee lijnen door O in het vlak $p x + q y + r z = 0$ loodrecht op elkaar tot nieuwe assen aanneemt. Want de twee substituties $\frac{p x + q y + r z}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} = X$ en $x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ doen de vergelijking overgaan in

$Y^2 + Z^2 = 0$. Deze cylinder kan ook beschouwd worden als de vereeniging der beide vlakken $Y \pm i\,Z = 0$ door de lijn O P, die den puntbol O volgens de isotrope lijnen door O van het vlak $p\,x + q\,y + r\,z = 0$ aanraken. Dus bestaat de doorsnee van $u_5 = 0$ en het vlak in het oneindige uit den onbestaanbaren cirkel γ, gemeen aan alle bollen, de lijn van doorsnee l met het vlak $p\,x + q\,y + r\,z = 0$, en de door het oneindig ver gelegen punt van O P gaande raaklijnen aan γ in de snijpunten met l.

5. Uit het voorgaande blijkt, dat de lijn O P eveneens dubbellijn is van $u_5 = 0$ en deze kegel de door O gaande isotrope lijnen O I en O I′ van het vlak $p\,x + q\,y + r\,z = 0$ driemaal bevat. Dus komt O P viermaal, en elk der lijnen O I, O I′ zesmaal voor onder de twintig gemeenschappelijke beschrijvende lijnen van $u_4 = 0$ en $u_5 = 0$, en worden deze drie veelvoudige lijnen tot de twintig aangevuld door de vier snijlijnen van den puntbol O en de puntellipsoïde, welke $a^2\,x^2 + b^2\,y^2 + c^2\,z^2 = 0$ tot vergelijking heeft.

6. Elk der beide lijnen O I, O I′ is een dubbellijn van $u_4 = 0$ en een drievoudige lijn van $u_5 = 0$. Dus hebben alle andere oppervlakken van den bundel $C u_4 + \lambda\,u_5 = 0$, en derhalve ook het gezochte, elk dier lijnen tot dubbellijnen en langs deze met $u_4 = 0$ gemeenschappelijke paren van dubbellijns-raakvlakken. Evenzoo hebben al deze oppervlakken O P tot dubbellijn; maar met de dubbellijns-raakvlakken langs O P is het anders gesteld. De dubbellijns-raakvlakken van $u_4 = 0$ en $u_5 = 0$ voor O P vallen namelijk niet samen; want voor $u_5 = 0$ zijn het de isotrope vlakken O P I en O P I′, en voor $u_4 = 0$ kunnen ze dit niet zijn, wijl $u_4 = 0$ zich dan in deze vlakken en een kegel van den tweeden graad zou moeten splitsen. En hiervan is nu het gevolg, dat de dubbellijns-raakvlakken zich bij het gezochte oppervlak met de plaats van het raakpunt op O P veranderen, en dit vlakkenpaar de door het paar O P I en O P I′ en het paar dubbellijns-raakvlakken van $u_4 = 0$ bepaalde involutie doorloopt, als het raakpunt de geheele lijn O P beschrijft. Wijl de isotrope vlakken door O P een vlakkenpaar dezer involutie vormen, zullen de dubbelvlakken dezer involutie loodrecht op

elkaar staan, en de involutie dus een hyperbolisch gelijkzijdige zijn en bestaan uit de paren van vlakken door O P, waarvan de hoek door de loodrecht op elkaar staande dubbelvlakken wordt middendoorgedeeld. De beide raakpunten der dubbelvlakken liggen op het verlengde van P O, en wel op een afstand $\frac{\beta^2}{d}$ en $\frac{\gamma^2}{d}$ van O af (vergelijk de oplossing van Dr. SCHOUTEN, blz. 6). Voor punten tusschen die grenzen zijn de dubbellijns-raakvlakken bestaanbaar, voor elk der grenzen vallen ze samen, en voor punten buiten die grenzen zijn ze onbestaanbaar. Hiermee samenhangend is elk punt van O P tusschen de grenzen een knooppunt (dubbelpunt met bestaanbare raaklijnen), elk der grenzen een keerpunt, en elk punt buiten de grenzen een afgezonderd punt (dubbelpunt met onbestaanbare raaklijnen) voor de vlakke doorsneden, die er doorgaan.

7. Het bovenstaande verklaart hoe het mogelijk is, dat een stelkundig oppervlak een d e e l eener lijn s c h ij n t te bevatten; niet slechts dit gedeelte behoort eenmaal, maar de geheele lijn behoort tweemaal tot het oppervlak. Dit blijkt ook uit de substitutie $x = X + \mu p$, $y = Y + \mu q$, $z = Z + \mu r$, waarbij de oorsprong naar een met μ veranderd punt van O P verplaatst wordt. We zien dan zoowel in u_4 als u_5 den bekenden term en de termen met X, Y, Z tot de eerste macht vervallen.

Het karakter van de involutie der paren van raakvlakken in de punten van O P volgt ook onmiddellijk uit de beschouwing van de traagheidsellips in het vlak $px + qy + rz = 0$. Zoo stemmen de dubbelvlakken met de assen dier traagheidsellips overeen, en maakt elk ander paar, als behoorende bij twee g e l ij k e middellijnen dier ellips, met elk der dubbelvlakken gelijke hoeken, enz.

8. In verband met de constructie der doorsneden van het oppervlak door vlakken door O P, kan uit het voorgaande de vorm van het oppervlak worden afgeleid. Deze doorsneden hebben in O een afgezonderd punt, snijden O P, ergens tusschen de grenzen in, in een bestaanbaar punt, en gaan door de onbestaanbare cirkelpunten harer vlakken, omdat het oppervlak door den onbestaanbaren cirkel γ gaat.

We wijzen dit eenvoudigheidshalve slechts aan voor het geval, dat P is aangenomen op een der assen van de traagheidsellipsoïde, en stellen daartoe $p = q = 0$. Dan is de vergelijking van het oppervlak

$$(a^2 x^2 + b^2 y^2) z^2 + c^2 (x^2 + y^2)^2 + r z (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

wat door de substitutie

$$x = \xi \cos \Phi, \quad y = \xi \sin \Phi, \quad z = \eta,$$

overgaat in

$$(a^2 \cos^2 \Phi + b^2 \sin^2 \Phi) \eta^2 + c^2 \xi^2 = - r \eta (\eta^2 + \xi^2).$$

Deze kromme van den derden graad vertoont de genoemde kenmerken. Bovendien is nu de lijn O P een as van symmetrie geworden, en staat de raaklijn in het bestaanbare snijpunt $\eta = - \dfrac{a^2 \cos^2 \Phi + b^2 \sin^2 \Phi}{r}$ loodrecht op O P (wat bij willekeurige ligging van P niet het geval is). In het algemeene geval heeft de kromme een asymptoot loodrecht op O P (in het asymptotisch vlak, dat in de oplossing op blz. 6 is aangewezen). Deze lijn $\eta = - \dfrac{c^2}{r}$ is hier buigasymptoot geworden. Zij nu $a > b > c$, en denken we r negatief, dan kunnen we op het horizontale vlak het oppervlak door zijn doorsneden met vlakken door de z-as nauwkeurig construeeren. Hierbij kunnen bovendien de lemniscaatachtige doorsneden met vlakken loodrecht op de z-as diensten bewijzen. En kan men zich het oppervlak voorstellen in het geval, dat hier is aangewezen, dan heeft men ook een inzicht in den vorm van het oppervlak, als P willekeurig ligt. De bij de grenspunten optredende loodrechte wiggen blijven dan voorkomen; alleen treedt bij de andere doorsneden scheefheid op. Eigenlijk heeft ook reeds bij de bijzondere ligging van P een der wiggen een meer kenmerkenden vorm, omdat deze zich aan de bolle zij van het oppervlak vertoont. Maar als voor $a^2 > c^2 > b^2$ het asymptotisch vlak tusschen de grenzen in ligt (wat voor $a^2 > b^2 > c^2$ met een op de y-as gelegen punt P gebeurt), dan hebben de beide wiggen den meest kenmerkenden vorm.

EENE SCHIJF BEWEEGT ZICH IN HAAR EIGEN VLAK; DE MEETKUNDIGE PLAATS DER PUNTEN TE BEPALEN, WIER PLOTSELINGE BEVESTIGING DE LEVENDE KRACHT DER SCHIJF TOT $\frac{1^e}{n}$ DER AANVANKELIJKE WAARDE BRENGT,

DOOR

W. VAN LOGHEM.

OPLOSSING.

Ten einde de bewegingsvergelijkingen op te stellen voor de schijf kan men zich voorstellen, dat de bevestiging van een harer punten B veroorzaakt wordt door het aanbrengen van eene zeer groote kracht K in B aangrijpende en werkende gedurende een zeer kort tijdsverloop T van af het tijdstip $t = 0$ tot het tijdstip $t = T$. Door T onbepaald te laten afnemen verkrijgt men bij de grens eene plotselinge bevestiging.

Denkt men zich de schijf verdeeld in massa-elementen, en zijn x, y de coördinaten van eenig element, met massa m, ten aanzien van een vast rechthoekig coördinatenstelsel, welks assen in het vlak der schijf liggen; dan voert het beginsel van D'ALEMBERT tot de bewegingsvergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\, m \frac{d^2 x}{d t^2} &= X, \\ \Sigma\, m \frac{d^2 y}{d t^2} &= Y; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathrm{I}$$

terwijl de sommatie der momenten geeft

$$\Sigma\, m\left(x\,\frac{d^2 y}{d\,t^2} - y\,\frac{d^2 x}{d\,t^2}\right) = x_0\, Y - y_0\, X \;.\;.\;.\;.\;.\; \mathrm{II}$$

Hierin zijn de sommaties uit te strekken over alle elementen der schijf; de coördinaten x_0, y_0 zijn die van het punt B, terwijl X Y de componenten zijn der kracht K.

Gedurende het tijdsverloop T blijven de snelheden der verschillende elementen eindig; neemt derhalve T onbepaald af, dan zijn bij de grens de verplaatsingen nul. Bij de integratie van de laatste vergelijking naar den tijd tusschen de grenzen 0 en T zijn dus de coördinaten als constanten aan te merken. Men krijgt dientengevolge

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\, m\,\frac{d\,x}{d\,t}\Big|_0^T &= \int_0^T X\,d\,t, \\ \Sigma\, m\,\frac{d\,y}{d\,t}\Big|_0^T &= \int_0^T Y\,d\,t; \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \mathrm{I}a$$

$$\Sigma\, m\left(x\,\frac{d\,y}{d\,t} - y\,\frac{d\,x}{d\,t}\right)\Big|_0^T = x_0\int_0^T Y\,d\,t - y_0\int_0^T X\,d\,t \;.\;.\; \mathrm{II}a$$

Stelt men de impulsies, dat wil zeggen, de eindige waarden, — waarin de integralen

$$\int_0^T X\,d\,t \quad \text{en} \quad \int_0^T Y\,d\,t$$

overgaan, als men T onbepaald laat afnemen en X en Y onbepaald laat toenemen — voor door P en Q respectievelijk, dan gaan bij de grens deze vergelijkingen over in

$$\left.\begin{aligned} Gr.\,\Sigma\, m\,\frac{d\,x}{d\,t}\Big|_0^T &= P, \\ Gr.\,\Sigma\, m\,\frac{d\,y}{d\,t}\Big|_0^T &= Q; \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \mathrm{I}b$$

$$Gr.\,\Sigma\, m\left(x\,\frac{d\,y}{d\,t} - y\,\frac{d\,x}{d\,t}\right)\Big|_0^T = x_0\, Q - y_0\, P \;.\;.\;.\;.\;.\; \mathrm{II}b$$

Laat G het massa-middelpunt zijn van de schijf, en laat de oogenblikkelijke as van wenteling op het tijdstip $t = 0$ het vlak der schijf doorboren in het punt A; de hoeksnelheid om die as zij Ω en de afstand G A zij a. De oorsprong van het vaste coördinatenstelsel valle saam met het punt,

waarin G zich bevindt onmiddellijk vóór de bevestiging van B; de positieve X-as valle saam met de richting, waarin zich het punt G op dat tijdstip beweegt, en G A zij de richting der positieve Y-as. De massa der schijf zij M.

Onmiddellijk vóór de bevestiging van B is $\Sigma\, m\, x = 0$, $\Sigma\, m\, y = 0$; en aangezien de verplaatsingen gedurende het tijdsverloop T nul zijn, gelden deze betrekkingen ook onmiddellijk na de bevestiging van B.

Vóór de bevestiging van B is

$$\frac{d\,x}{d\,t} = \Omega\,(a - y),\ \text{derhalve}\ \Sigma\, m\,\frac{d\,x}{d\,t} = M\,\Omega\, a\,;$$

$$\frac{d\,y}{d\,t} = \Omega\, x\quad,\ \text{derhalve}\ \Sigma\, m\,\frac{d\,y}{d\,t} = 0\,;$$

$$\text{dus}\ \Sigma\, m\left(x\,\frac{d\,y}{d\,t} - y\,\frac{d\,x}{d\,t}\right) = \Omega\,\Sigma\, m\,(x^2 + y^2) = M\,\Omega\, k^2,$$

waarin k de arm van inertie der schijf met betrekking tot eene as, loodrecht op het vlak der schijf gericht en gaande door G.

Na het vastworden van B gaat de schijf wentelen om B met eene hoeksnelheid Ω'. Nu is

$$\frac{d\,x}{d\,t} = \Omega'\,(y_0 - y),\ \text{derhalve}\ \Sigma\, m\,\frac{d\,x}{d\,t} = M\,\Omega'\, y_0;$$

$$\frac{d\,y}{d\,t} = \Omega'\,(x - x_0),\ \text{derhalve}\ \Sigma\, m\,\frac{d\,y}{d\,t} = -\,M\,\Omega'\, x_0;$$

$$\text{dus}\ \Sigma\, m\left(x\,\frac{d\,y}{d\,t} - y\,\frac{d\,x}{d\,t}\right) = M\,\Omega'\, k^2.$$

De vergelijkingen Ib en IIb gaan nu over in

$$\left.\begin{aligned} M\,\Omega'\, y_0 - M\,\Omega\, a &= P,\\ -\,M\,\Omega'\, x_0 \qquad &= Q, \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ \mathrm{I}c$$

$$M\,\Omega'\, k^2 - M\,\Omega\, k^2 = x_0\, Q - y_0\, P.\ \ldots\ \mathrm{II}c$$

Lost men uit deze drie vergelijkingen Ω', P en Q op, dan verkrijgt men

$$\Omega' = \quad \Omega\ \frac{k^2 + a\, y_0}{k^2 + x_0^2 + y_0^2},\ \ldots\ldots\ldots\ \alpha)$$

$$P = -\,M\,\Omega\,\frac{a\, x_0^2 + k^2\,(a - y_0)}{k^2 + x_0^2 + y_0^2},\ \ldots\ldots\ \beta)\ ^{1})$$

1) Laat P de projectie zijn van A op G B en laten B G, B P, P A respectievelijk door c, ξ, ζ aangegeven worden, dan volgt uit β) en γ), dat de tangens

$$Q = -M\,\Omega\,\frac{(k^2 + a\,y_0)\,x_0}{k^2 + x_0^2 + y_0^2} \quad \ldots\ldots\ldots \gamma)$$

Neemt men op het verlengde van A G een punt A′ aan, zoodanig dat

$$\mathrm{G\,A'} = \frac{k^2}{a} = a',$$

dan is A′ het bij A als ophangpunt behoorende slingerpunt. Met invoering van a' gaat α) over in

$$\Omega' = \Omega\,\frac{a\,(a' + y_0)}{k^2 + x_0^2 + y_0^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \alpha')$$

Brengt men in A′ eene lijn aan, loodrecht op A A′ gericht, dan blijkt uit α'), dat Ω' nul wordt, als eenig punt van die lijn — de grenslijn — gegrepen wordt, en voorts dat Ω' al of niet met Ω in teeken overeenstemt, naarmate B en A aan denzelfden kant of te weerszijden van de grenslijn gelegen zijn. Elk punt der schijf heeft zijne grenslijn. Wordt A′ het punt, waarin de oogenblikkelijke as van wenteling de schijf doorboort, dan gaat de grenslijn door A. De grenslijn van het massamiddelpunt verdwijnt op oneindigen afstand, want dan is $a = 0$. Heeft het lichaam vóor de bevestiging van B eene translatiesnelheid, dat wil zeggen, is $a = \infty$, dan gaat de grenslijn evenwijdig aan de richting der translatiesnelheid door het massamiddelpunt.

Noemt men L de levende kracht der schijf onmiddellijk vóór — en L' die onmiddellijk na de bevestiging van B, dan is

$$\begin{aligned} L &= \Sigma\, m\left[\left(\frac{d\,x}{d\,t}\right)^2 + \left(\frac{d\,y}{d\,t}\right)^2\right] = M\,\Omega^2\,(k^2 + a^2), \\ L' &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = M\,\Omega'^2\,(k^2 + x^2 + y^2), \end{aligned}$$

---

van den hoek, dien de resultante der impulsies P en Q maakt met de lijn B G, gelijk is aan

$$-\frac{k^2}{c^2 + k^2}\cdot\frac{\xi}{\zeta};$$

waaruit blijkt, dat de richting dier resultante en die van de lijn B A zijn **verwante** richtingen met betrekking tot eene ellips, welker middelpunt is B, welker groote as gericht is volgens B G, en welker numerische excentriciteit bedraagt

$$\frac{c}{\sqrt{c^2 + k^2}}.$$

wanneer x, y in plaats van x_0, y_0 geschreven wordt. Drukt men Ω' met behulp van $\alpha)$ uit in Ω, dan gaat L' over in

$$L' = M\,\Omega^2 \frac{(k^2 + a\,y)^2}{k^2 + x^2 + y^2}.$$

Opdat nu $L' = \frac{1}{n}\,L$ zij, moeten x en y voldoen aan de betrekking

$$\frac{(k^2 + a\,y)^2}{k^2 + x^2 + y^2} = \frac{k^2 + a^2}{n},$$

waarvoor men schrijven kan

$$(k^2 + a^2)\,x^2 + (k^2 + a^2 - n\,a^2)\,y^2 - 2\,n\,a\,k^2 y + k^2 (k^2 + a^2 - n\,k^2) = 0. \quad 1)$$

Dit is de vergelijking eener kegelsnede, symmetrisch ten aanzien der lijn G A gelegen.

Schrijft men 1) in den vorm

$$(k^2 + a^2)\,x^2 + k^2\,(y - a)^2 = (n - 1)\,(k^2 + a\,y)^2,$$

dan blijkt hieruit, dat n niet kleiner dan 1 kan zijn, wat ook uit dynamische gronden is af te leiden [1]).

Stelt men $a^2 + k^2 = b^2$ en schrijft men 1) in den vorm

$$x^2 + (y - d)^2 = e^2\,(y - f)^2,$$

waarin

$$d = \frac{a\,k\,[n\,k \pm b\,\sqrt{n\,(n - 1)}]}{b^2 - n\,a^2},$$

$$f = \frac{k\,[n^2\,a^2\,k \pm b^3\,\sqrt{n\,(n - 1)}]}{n\,a\,(b^2 - n\,a^2)},$$

$$e = \frac{a}{b}\,\sqrt{n},$$

dan geven de twee waarden van d de ordinaten der twee brandpunten, de twee waarden van f de afstanden tot G van de twee aan de X-as evenwijdige richtlijnen, terwijl e aangeeft, hoe de numerische excentriciteit van n afhangt. De ordinaten van de toppen op de lijn G A zijn

---

1) Wanneer de snelheidscomponenten u, v, w van eenig punt onder de werking van eene in dat punt aangrijpende impulsie met componenten P, Q, R, omgezet worden in u', v', w', dan is de winst in levende kracht gelijk aan

$$P\,\frac{u + u'}{2} + Q\,\frac{v + v'}{2} + R\,\frac{w + w'}{2}$$ [THOMSON and TAIT, Nat. Phil. art. 308].

Deze eigenschap, op het onderhavig probleem toegepast, geeft een verlies in levende kracht.

$$y_1 = a + \frac{(a^2 + k^2)\sqrt{n-1}}{k - a\sqrt{n-1}},$$

$$y_2 = a - \frac{(a^2 + k^2)\sqrt{n-1}}{k + a\sqrt{n-1}};$$

terwijl de ordinaat van het middelpunt is

$$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2} = a + \frac{(n-1)\,a\,b^2}{b^2 - n\,a^2}.$$

Laat men n de verschillende waarden van 1 tot ∞ doorloopen, dan doen zich de volgende gevallen voor

$n = 1$ . . . . . . een elliptisch punt, namelijk A.

$1 < n < 1 + \frac{k^2}{a^2}$ een stelsel ellipsen, binnen welke A gelegen is. De middelpunten dier ellipsen liggen alle op het verlengde van G A en verwijderen zich, naar mate n toeneemt, steeds meer van A.

$n = 1 + \frac{k^2}{a^2}$ . . eene parabool, welker holle zijde naar A gekeerd is. Het brandpunt ligt op het midden van G A; de parameter is a'.

$1 + \frac{k^2}{a^2} < n$. . . een stelsel hyperbolen. De twee takken van elke hyperbool uit het stelsel liggen te weerszijden van de grenslijn. De middelpunten dier hyperbolen liggen alle op het verlengde van G A′ en naderen, naarmate n toeneemt, steeds meer A′.

$n = \infty$ . . . . . De vergelijking 1) gaat over in $\left(y + \frac{k^2}{a}\right)^2 = 0$, voorstellende twee rechte lijnen, samenvallende met de grenslijn. Wordt een punt dier lijn gegrepen, dan wordt daardoor de schijf tot rust gebracht.

Bijzondere gevallen.

a) Heeft het lichaam voor de bevestiging van B alleen eene translatiesnelheid, dan is $a = \infty$ en de vergelijking 1) gaat over in

$$x^2 - (n-1)\,y^2 + k^2 = 0,$$

aangevende een stelsel hyperbolen, welker middelpunt in G ligt. n kan nu niet gelijk aan 1 zijn. Is $n = \infty$, dan krijgt men de dubbele X-as.

b) Gaat voor de bevestiging van B de oogenblikkelijke as van wenteling door het zwaartepunt, dan is $a = 0$. De vergelijking 1) gaat thans over in

$$x^2 + y^2 = (n - 1) k^2,$$

gevende voor de verschillende waarden van n een stelsel concentrische cirkels met G tot middelpunt. Is $n = 1$ dan voldoet alleen G. Voorts kan de schijf thans niet tot rust gebracht worden door een punt op eindigen afstand te bevestigen.

OVER DE KANS DAT, BIJ WILLEKEURIGE VERDEELING VAN EENE GEGEVEN RECHTE LIJN, DE SEGMENTEN TUSSCHEN GEGEVEN GRENZEN LIGGEN,

DOOR

F. J. VAN DEN BERG.

Op blz. 256—257 van het »Bulletin de la société mathématique de France, Tome I, 1872—73", komt, met verwijzing naar de »Comptes rendus" (des séances de l'Académie des Sciences) van 9 December 1867, eene oplossing van C. JORDAN voor van het vraagstuk: »Eene rechte lijn, lang l, wordt verdeeld in m segmenten. Hoe groot is de kans, dat n van deze segmenten langer zullen zijn dan eene gegeven lengte a?"

Op blz. 74—79 van hetzelfde Bulletin, Tome VIII, 1879—80, geeft LAQUIÈRE, met eenige terechtwijzing omtrent eene der formulen van JORDAN, eene andere oplossing van hetzelfde vraagstuk.

Het is mij voorgekomen, dat niet alleen het genoemde vraagstuk, maar bovendien andere meer algemeene van soortgelijken aard, ook zouden kunnen behandeld worden volgens eene rekenwijze, die, in het onderwerpelijke geval althans, eenvoudiger is dan die van LAQUIÈRE, en die ik mij veroorloof in het onderstaande eenigszins nader uiteen te zetten.

Stel dat eene gegeven rechte lijn l wordt verdeeld in m willekeurige segmenten. Stel dat alle mogelijke segmenten

van 0 tot l, wat hunne grootte betreft, zich rangschikken in eenige groepen, wier gegeven grenzen elkander uitsluiten, zooals — om de bedoeling door een voorbeeld nader toe te lichten — eene eerste groep omvattende de segmenten van $0.02\,l$ tot $0.03\,l$ en tevens die van $0.06\,l$ tot $0.08\,l$; eene tweede groep van 0 tot $0.01\,l$; eene derde groep van $0.03\,l$ tot $0.04\,l$ en van $0.08\,l$ tot $0.09\,l$; eene laatste of aanvullingsgroep van $0.01\,l$ tot $0.02\,l$, tevens van $0.04\,l$ tot $0.06\,l$ en tevens van $0.09\,l$ tot l zelf. Stel dat de notatie $K_{p_1 . p_2 . p_3 \ldots p_n}$ aanduidt de kans, dat van de gezamenlijke m segmenten er p_1 — en wel p_1 wier rangnummers in de rij der m segmenten van te voren naar willekeur zijn vastgesteld — behooren tot de 1e groep, p_2 evenzóo aangewezene tot de 2e groep, enz., p_n aangewezene tot de n^e of laatste of aanvullingsgroep (van welke aantallen p naar omstandigheden sommige ook nul zouden kunnen zijn), terwijl voor de dan nog overblijvende $m - (p_1 + p_2 + \ldots + p_n)$ segmenten in het midden wordt gelaten, tot welke groep deze ieder voor zich behooren. Indien men dan bij eene overigens willekeurige verdeeling, waarvoor de m segmenten zich groepeeren als zoo even gezegd, zich al die segmenten, zoowel wat rangnummer als wat grootte betreft, onveranderlijk denkt met uitzondering van slechts één bepaaldelijk aangewezen segment bij voorbeeld van de q^{de} groep — welks grootte integendeel veranderlijk wordt gedacht niet alleen binnen de grenzen van zijne eigen q^{de} groep, maar ook over alle overige groepen, en welk segment in dezen zin alzoo tot de $m -$ $- (p_1 + p_2 + \ldots + p_n)$ in grootte onbepaalde segmenten zou worden teruggebracht — dan is het aantal mogelijke verdeelingen, die de beschouwde enkele verdeeling door de omschreven veranderlijkheid in werkelijkheid oplevert, blijkbaar niet anders dan de som der aantallen van alle mogelijke verdeelingen, waarbij (steeds voor dezelfde $p_1 + p_2 + \ldots +$ $+ (p_q - 1) + \ldots + p_n$ segmenten) beurtelings het aantal segmenten van iedere groep door toetreding van het enkele veranderlijke segment met de eenheid zou vermeerderd worden. En daar deze regel geldig is, van welke tot de omschreven groepeering behoorende verdeeling op zich zelve men ook uit-

gaat, blijft hij ook gelden voor de gezamenlijke sommen der genoemde aantallen eenerzijds en anderzijds. En wederom blijft hij geldig bij deeling door het geheele aantal van alle mogelijke verdeelingen, waarvoor, zonder zich te storen aan de n groepen met hare grenzen, de gegeven lijn vatbaar is, dat is, voor de kansen die alsdan in de plaats van de overeenkomstige aantallen treden. Hierdoor is, naar wij meenen, in de omschreven onderstellingen de algemeene formule

$$\begin{aligned} K_{p_1.p_2\ldots p_q-1\ldots p_n} &= K_{p_1+1.p_2..p_q-1..p_n} + \\ &+ K_{p_1.p_2+1..p_q-1..p_n} + \ldots\ldots + K_{p_1.p_2..p_q..p_n} + \\ &+ \ldots\ldots + K_{p_1.p_2..p_q-1.\,p_n+1} \end{aligned}$$

beredeneerd, die, bij oplossing van $K_{p_1.p_2\ldots p_q..p_n}$ en naarmate men opvolgend $q = 1, 2$, enz., n neemt, de n symbolische formulen

$$\begin{aligned} K_{p_1.p_2.p_3..p_n} &= K_{p_1-1.p_2.p_3..p_n}(1 - K_{0.1.0..0} - K_{0.0.1..0} - \ldots\ldots - K_{0.0.0..1}) = \\ &= K_{p_1.p_2-1.p_3..p_n}(1 - K_{1.0.0..0} - K_{0.0.1..0} - \ldots\ldots - K_{0.0.0..1}) = \\ &= K_{p_1.p_2.p_3-1..p_n}(1 - K_{1.0.0..0} - K_{0.1.0..0} - \ldots\ldots - K_{0.0.0..1}) = \\ &= \text{enz.} = \\ &= K_{p_1.p_2.p_3..p_n-1}(1 - K_{1.0.0..0} - K_{0.1.0..0} - \ldots\ldots - K_{0.0..1.0}) \end{aligned}$$

oplevert; waarin namelijk telkens bij ontwikkeling van het tweede lid de aanwijzers van elke K binnen de haakjes, ieder geteld moeten worden bij den overeenkomstigen aanwijzer van de voor de haakjes staande K. En deze zelfde beteekenis, wat de aanwijzers betreft, is te hechten aan de meer algemeene formulen, die men dadelijk door bij voorbeeld s-maal herhaalde toepassing van eene zelfde der vorenstaande verkrijgt; en waarvan bij voorbeeld de eerste luidt

$$K_{p_1.p_2.p_3..p_n} = K_{p_1-s.p_2.p_3..p_n}(1 - K_{0.1.0..0} - K_{0.0.1..0} - \ldots\ldots - K_{0.0.0..1})^s,$$

ten blijke, dat de terugbrenging der berekening van de kans $K_{p_1.p_2.p_3..p_n}$ langs dezen weg tot die van kansen, waarvoor, al worden de verdere aanwijzers ook grooter, althans de eerste aanwijzer in iederen term zich van p_1 tot $p_1 - s$ verlaagt, (en dus, door $s = p_1$ te nemen, zelfs tot nul kan worden teruggebracht, als wanneer de eerste groep segmenten geheel verdreven is) afhangt van de ontwikkeling der s^{de} macht van een polynomium.

Zooals te verwachten was, blijven de bedoelde kansen, opgemaakt voor segmenten, die ieder voor zich eene te voren aangewezen plaats in de rij der m gezamenlijke segmenten hebben, evenwel onafhankelijk van deze plaatsen of rangnummers zelve, en hangen zij slechts af van de aantallen segmenten, die in iedere groep op zich zelf verlangd worden, en van de begrenzingen dezer groepen. En overigens wordt in iedere verdeeling op zich zelve de onderlinge volgorde der segmenten van eene zelfde groep onverschillig ondersteld, en komt iedere groep dus slechts éénmaal vóór, als verbinding namelijk van hare segmenten, en niet meermalen, als stelsel der mogelijke onderlinge verschikkingen van deze zelfde segmenten. Van daar dat, als de boven besproken kans bedoeld zou worden niet voor te voren aangewezen of vastgestelde segmenten, maar voor even zoo vele, overigens naar willekeur op de gegeven lijn geplaatste, segmenten in iedere groep, deze kans $K_{p_1.p_2.p_3..p_n}$ nog behoort vermenigvuldigd te worden met het aantal mogelijke verdeelingen der m segmenten in $n+1$ verbindingen, opvolgend van p_1, p_2, enz., p_n en $m-(p_1+p_2+\ldots.+p_n)$ segmenten, dat is met het aantal $\dfrac{m!}{p_1!\,p_2!\ldots.\,p_n!\,(m-(p_1+p_2+\ldots.+p_n))!}$.

Als eerste toepassing nemen wij het geval, dat van de m segmenten der lijn l er p te voren aangewezene $<a$, en r aangewezene $>a$ verlangd worden, terwijl de $m-p-r$ overblijvende segmenten van willekeurige grootte kunnen zijn. De eerste van onze formulen bepaalt zich in dat geval tot $K_{p.r}=K_{p-1.r}\,(1-K_{0.1})$, geeft dus door p opvolgende aanwendingen $K_{p.r}=K_{0.r}\,(1-K_{0.1})^p$, en, als men nu tot de werkelijke ontwikkeling van dit binomium overgaat, $K_{p.r}=\sum_0^p{}_k\,(-)^k\binom{p}{k}K_{0.r+k}$. Men wordt hierdoor dus teruggebracht tot de berekening van de door $K_{0.r+k}$ voorge-

stelde kans, dat onder de m segmenten er $r+k$, wier rangnummers weder van te voren naar willekeur zijn aangewezen, $>a$ zullen zijn (terwijl de grootte van alle $m-r-k$ overige segmenten weder in het onbepaalde wordt gelaten): en deze kans laat zich, in den trant der in de aangehaalde oplossing van JORDAN overgenomen redeneering van HALPHEN op blz. 221—224 van hetzelfde Tome I, dadelijk bepalen door de opmerking, dat bij iedere verdeeling van dezen aard $r+k$ stukken a van de lijn l voorkomen, waarop geen der $m-1$ deelpunten kunnen liggen; dat deze deelpunten dus, in plaats van over de volle l, alsdan telkens slechts over eene gezamenlijke lengte $l-(r+k)a$ verspreid kunnen zijn; dat de kans daartoe voor ieder deelpunt op zich zelf door $\frac{l-(r+k)a}{l}$ wordt uitgedrukt — immers, zoolang $l-(r+k)a$ nog positief is, want anders zou deze kans gelijk nul zijn — en dat bijgevolg de overeenkomstige kans voor de $m-1$ deelpunten tegelijk bedraagt (onder hetzelfde voorbehoud) $K_{0.r+k}=$ $=\left(\frac{l-(r+k)a}{l}\right)^{m-1}$. De substitutie nu van deze waarde geeft de verlangde formule $K_{p.r}=\sum\limits_{0}^{<\frac{l}{a}-r} k(-)^k\binom{p}{k}\left(\frac{l-(r+k)a}{l}\right)^{m-1}$, waarin namelijk steeds de oorspronkelijke bovengrens $k=p$ zonder bezwaar door de zoo even opgemerkte $k<\frac{l}{a}-r$ mocht vervangen worden, omdat, zoodra deze k de waarde p zou komen te overschrijden, de binomiaal-coëfficienten $\binom{p}{k}$ toch van zelf gelijk nul zouden worden. Indien overigens, in plaats van p, r en $m-p-r$ segmenten met van te voren aangewezen rangnummers, in deze vraag evenveel, maar willekeurig geplaatste, segmenten van dezelfde drie soorten zouden bedoeld worden, dan moet, zooals boven opgemerkt, de even gevonden $K_{p.r}$ nog met den factor $\frac{m!}{p!\,r!\,(m-p-r)!}$ vermenigvuldigd worden.

Onderstelt men meer in het bijzonder $p = m - r$, zoodat, het aantal $m - p - r$ segmenten van willekeurige grootte in nul overgaande, dan niet meer en ook niet minder dan r segmenten van de soort $> a$ verlangd worden, dan wordt voor aangewezen rangnummers van deze r segmenten de kans alzoo

$$K_{m-r.r} = \sum_{0}^{<\frac{l}{a}-r} k\,(-)^k \binom{m-r}{k} \left(\frac{l-(r+k)\,a}{l}\right)^{m-1};$$

en alsnu, wegens $(m - p - r)! = 0! = \frac{1!}{1} = 1$, vermenigvuldigende met $\frac{m!}{(m-r)!\,r!}$, dat is met den binomiaal-coëfficient $\binom{m}{r}$, komt voor de kans van juist r willekeurig gepl aatste segmenten $> a$

$$A_r = \binom{m}{r} K_{m-r.r} = \binom{m}{r} \sum_{0}^{<\frac{l}{a}-r} k\,(-)^k \binom{m-r}{k} \left(\frac{l-(r+k)\,a}{l}\right)^{m-1} =$$

$$= \sum_{0}^{<\frac{l}{a}-r} k\,(-)^k \frac{m!}{r!\,k!\,(m-r-k)!} \left(\frac{l-(r+k)\,a}{l}\right)^{m-1} =$$

$$= \sum_{0}^{<\frac{l}{a}-r} k\,(-)^k \binom{m}{r+k} \binom{r+k}{k} \left(\frac{l-(r+k)\,a}{l}\right)^{m-1};$$

welke kans wij hier niet alleen onder drie verschillende vormen hebben nedergeschreven, maar tevens reeds dadelijk — omdat zij werkelijk, behoudens LAQUIÈRE's opmerking omtrent de formule voor C_n van JORDAN, met beider uitkomsten overeenstemt — door hunne notatie A_r hebben aangeduid. Terwijl wij overigens reeds thans dezen uitstap naar het bijzondere geval $p = m - r$ (waarop wij zoo straks nader terugkomen) gemaakt hebben, om beter te doen uitkomen, hoe spoedig de formule voor A_r uit de voorafgaande beginselen volgt, keeren wij eerst nog eenige oogenblikken naar

het meer algemeene geval van willekeurige p en r terug.

Wij willen namelijk doen opmerken, dat de in dat geval te hulp geroepen formule $K_{0.r+k} = \left(\frac{l - (r+k)\,a}{l}\right)^{m-1}$, in plaats van door de gebezigde redeneering, ook wel door berekening kan worden gevonden. Noemende toch de m segmenten van de lijn l opvolgend x_1, x_2, ..., x_{m-1} en $l - (x_1 + x_2 + \ldots. + x_{m-1})$, en voerende in het algemeen de notatie $S_i = x_1 + x_2 + \ldots. + x_i$ in, zoo zijn bij geheel willekeurige verdeeling de grenzen opvolgend: voor x_1, 0 en l; voor x_2, 0 en $l - S_1$; voor x_3, 0 en $l - S_2$; enz.; voor x_{m-1}, 0 en $l - S_{m-2}$; en is alzoo het geheele aantal verdeelingen evenredig aan de veelvoudige integraal

$$\int_0^l d\,x_1 \int_0^{l-S_1} d\,x_2 \int_0^{l-S_2} d\,x_3 \ldots \int_0^{l-S_{i-1}} d\,x_i \ldots \int_0^{l-S_{m-3}} d\,x_{m-2} \int_0^{l-S_{m-2}} d\,x_{m-1},$$

die men ook in denzelfden geest opgesteld vindt in de zoo even reeds vermelde bijdrage van HALPHEN. Voor de uitrekening daarvan mag men nu iedere veranderlijke x_i vervangen door de overeenkomstige $l - S_{i-1} - x_i$ of $l - S_i$ als nieuwe veranderlijke, omdat deze vervanging wel is waar telkens het teeken van $d\,x_i$ zou omkeeren, maar met gelijktijdige verwisseling telkens van de beide bijbehoorende integratiegrenzen. En als men dan na deze vervanging opmerkt, dat bij iedere integratie, terwijl de ondergrens overal gelijk nul blijft, de bovengrens $l - S_{i-1}$ telkens juist gelijk is aan de veranderlijke van de onmiddellijk daarna te verrichten integratie, en dat op dien grond de als veranderlijken voorkomende notatiën geheel buiten invloed blijven op de waarde van de uitkomst en allen bij voorbeeld door eene zelfde willekeurige veranderlijke x kunnen vervangen worden; dan blijkt de vorenstaande veelvoudige integraal gelijk te zijn aan de meer beknopte $\int_0^l d\,x \overbrace{\int_0^x d\,x}^{m-2} {}^{m-2} = \int_0^l \frac{x^{m-2}}{(m-2)!}\,d\,x = \frac{l^{m-1}}{(m-1)!}$. Deze uitkomst geldt, zooals gezegd, voor geheel willekeurige verdeelingen van de lijn l in m segmenten. Maar worden nu weder $r + k$ van deze segmenten, en wel

met van te voren aangewezen rangnummers, $> a$ verlangd, en stelt men de segmenten van deze soort, niet zooals de overigen door de enkele letters x, maar thans door $x + a$ voor, terwijl de notatie S_i telkens onveranderd als zoo even wordt aangehouden; dan gelden voor elk segment x_i, dat niet tot de genoemde soort behoort, en waaraan reeds j segmenten wél van diezelfde soort voorafgaan, en dus nog $r + k - j$ dergelijke moeten volgen (voor welke laatsten alzoo minstens eene ruimte van $(r + k - j)\,a$ moet worden vrijgehouden), de grenzen $0 < x_i < l - (S_{i-1} + j\,a) - (r + k - j)\,a =$ $= l - (r + k)\,a - S_{i-1}$; terwijl daarentegen voor elk segment $x_i + a$ dat wél van de soort $> a$ is, indien ook hieraan zeker aantal j van dezelfde soort voorafgaan, maar dus thans nog slechts $r + k - 1 - j$ van die soort moeten volgen, de grensbepaling luidt $a < x_i + a < l - (S_{i-1} + j\,a) -$ $-(r + k - 1 - j)\,a$, dat is weder $0 < x_i < l - (r + k)\,a - S_{i-1}$. Het blijkt dus, bij vergelijking met de boven geldige grenzen $0 < x_i < l - S_{i-1}$, dat thans voor alle segmenten, onverschillig of hunne grootte de gegevene a moet overtreffen dan wel in het onzekere wordt gelaten, geene andere wijziging noodig is dan de vervanging telkens in de integratiegrenzen van iedere l door $l - (r + k)\,a$. Met diezelfde vervanging mag men dus ook in de gevonden uitkomst $\frac{l^{m-1}}{(m-1)!}$ volstaan, en de verhouding van beide uitkomsten geeft dan als boven voor de verlangde kans

$$K_{0.r+k} = \left(\frac{l - (r + k)\,a}{l}\right)^{m-1}.$$

Desverkiezende kan men ook als volgt zonder integratiën tot hetzelfde besluit geraken. Men denke zich de lijn l zamengesteld uit een oneindig groot aantal $\frac{l}{\delta}$ onderling gelijke elementen δ. Bij iedere willekeurige verdeeling dier lijn in m segmenten zullen dan de afstanden der $m - 1$ deelpunten tot een der beide uiteinden $m - 1$ onderling verschillende van de $\frac{l - \delta}{\delta}$ waarden δ, 2δ, 3δ, ..., $l - \delta$ hebben. En het geheele aantal verdeelingen is mitsdien gelijk

aan het aantal verbindingen van deze $\frac{l-\delta}{\delta}$ waarden $m-1$ aan $m-1$, dat is gelijk aan den binomiaal-coëfficient

$$\binom{(l-\delta):\delta}{m-1}=\frac{\left(\frac{l}{\delta}-1\right)\left(\frac{l}{\delta}-2\right)\left(\frac{l}{\delta}-3\right)\ldots\left(\frac{l}{\delta}-(m-1)\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(m-1)};$$

waarvoor men, gelet dat in den teller de getallen van 1 tot en met $m-1$ allen tegenover $\frac{l}{\delta}$ verdwijnen, mag nemen $\frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{l}{\delta}\right)^{m-1}$. De verdere beredeneering volgt weder als boven.

Thans terugkeerende tot het bijzondere geval $p=m-r$, leiden wij in de eerste plaats uit de gevonden kans A_r van juist r segmenten $>a$ de door JORDAN en LAQUIÈRE B_r genoemde kans af voor het bestaan van minstens r segmenten van deze soort, wordende hunne rangnummers weder willekeurig gelaten. Voor deze kans, die wij tevens door de notatie $A_{>r-1}$ zullen voorstellen, heeft men dus $A_{>r-1}=$

$$=B_r=A_r+A_{r+1}+\ldots+A_m=\sum_0^{m-r} {}_i\, A_{r+i};$$ en voor de uitrekening van deze som schijnt zich nu de derde vorm, waaronder wij A_r gebracht hebben, het best te leenen: immers, indien men, ten einde bij de sommatie van de verschillende A_{r+i} alle termen met denzelfden aanwijzer $r+k$ bijeen te brengen, in dien derden vorm, tegelijk met den aanwijzer r door $r+i$, ook den veranderlijken aanwijzer k vervangt door $k-i$, komt

$$A_{>r-1}=\sum_0^{<\frac{l}{a}-r} {}_k\binom{m}{r+k}\left\{\sum_0^{k} {}_i\,(-)^{k-i}\binom{r+k}{k-i}\right\}\left(\frac{l-(r+k)\,a}{l}\right)^{m-1},$$

waarin $\sum_0^{k} {}_i\,(-)^{k-i}\binom{r+k}{k-i}=(-)^k\sum_0^{k} {}_i\,(-)^i\left\{\binom{r+k-1}{k-i}+\right.$

$\left.+\binom{r+k-1}{k-i-1}\right\}=(-)^k\binom{r+k-1}{k}$ wordt; en zoodoende heeft men

$$A_{>r-1} = B_r = \sum_{0}^{<\frac{l}{a}-r} k\,(-)^k \binom{m}{r+k}\binom{r+k-1}{k}\left(\frac{l-(r+k)a}{l}\right)^{m-1},$$

hetgeen werkelijk dezelfde formule is als bij JORDAN en bij LAQUIÈRE.

In plaats van als som der kansen A_r, A_{r+1}, ..., tot en met A_m, laat zich de gevonden kans B_r ook vrij eenvoudig uitdrukken in functie van de boven berekende kansen $K_{p.r}$ voor de verschillende bij onveranderde r behoorende waarden van p; en wel door de formule $B_r = \sum_{0}^{m-r} p \binom{r+p-1}{p} K_{p.r}$.

Deze formule laat zich bij voorbeeld als volgt beredeneeren. Men denke zich gemakshalve, dat voor de p aangewezen segmenten $< a$ en de r aangewezene $> a$, waarop de kans $K_{p.r}$ betrekking heeft — en welke, juist omdat de overblijvende $m - p - r$ segmenten van willekeurige grootte kunnen zijn, dus steeds voor elke p tot eene verdeeling met minstens r segmenten $> a$ behooren — de $p + r$ eerste segmenten van de lijn l genomen worden. Deze kans $K_{p.r}$ zou dan, bij de zamenstelling langs dezen weg van B_r uit de verschillende waarden, die $K_{p.r}$ voor $p = 0$ tot en met $m - r$ verkrijgt, telkens zooveelmaal voorkomen als de $p + r$ eerste segmenten in twee groepen van p en van r segmenten kunnen verdeeld worden — ware het niet, dat daarbij telkens die verdeelingen, waarbij het $(p + r)^e$ segment zelf tot de groep $< a$ zou behooren, niet in rekening mogen gebracht worden, — omdat daarvoor tevens van de $p + r - 1$ eerste segmenten nog $p - 1$ segmenten $< a$ en de r andere $> a$ zouden wezen, zoodat deze verdeelingen als zoodanig reeds bij de onder het onmiddellijk voorafgaande hoofd $K_{p-1.r}$ gerangschikte voorkomen. Van daar dat onder het hoofd $K_{p.r}$ zelf alleen die verdeelingen mogen worden opgenomen, waarbij bepaaldelijk het $(p + r)^e$ segment en voorts nog $r - 1$ van de $p + r - 1$ eerste segmenten $> a$, de andere p van deze segmenten $< a$, en de dan nog overblijvende $m - p - r$ segmenten willekeurig zijn: de kans $K_{p.r}$ komt derhalve slechts zooveelmaal

voor, als de $p+r-1$ eerste segmenten in twee groepen van $r-1$ en van p segmenten kunnen verdeeld worden, dat is $\binom{p+r-1}{r-1}=\binom{r+p-1}{p}$-maal; en van daar de vorenstaande formule $B_r=\sum_0^{m-r}{}_p\binom{r+p-1}{p}K_{p.r}$. Vult men overigens in deze formule de voor $K_{p.r}$ gevonden waarde weder in, en keert men daarbij tevens de volgorde der beide sommatiën om, waardoor

$$B_r=\sum_0^{<\frac{l}{a}-r}{}_k(-)^k\left\{\sum_0^{m-r}{}_p\binom{r+p-1}{p}\binom{p}{k}\right\}\left(\frac{l-(r+k)a}{l}\right)^{m-1}$$

wordt; past men dan de vervorming $\binom{r+p-1}{p}\binom{p}{k}=$
$=\frac{(r+p-1)!}{(r-1)!\,k!\,(p-k)!}=\binom{r+k-1}{k}\binom{r+p-1}{r+k-1}$ toe, en let men op, dat $\binom{r+p-1}{r+k-1}$ voor $p<k$ steeds gelijk nul is en dus voor iedere k slechts van $p=k$ tot $m-r$ behoeft gesommeerd te worden; dan komt $\sum_0^{m-r}{}_p\binom{r+p-1}{p}\binom{p}{k}=$

$$=\binom{r+k-1}{k}\sum_k^{m-r}{}_p\binom{r+p-1}{r+k-1}=\binom{r+k-1}{k}\sum_k^{m-r}{}_p\left\{\binom{r+p}{r+k}-\right.$$

$$\left.-\binom{r+p-1}{r+k}\right\}=\binom{r+k-1}{k}\binom{m}{r+k},$$ en is alzoo ook langs dezen weg de boven reeds voor $A_{>r-1}$ of B_r verkregen uitdrukking teruggevonden.

Ten overvloede kan men zich nog langs anderen weg vergewissen van de gelijkwaardigheid der beide voor B_r opgestelde sommen, namelijk

$$B_r=\sum_0^{m-r}{}_iA_{r+i}=\sum_0^{m-r}{}_i\binom{m}{r+i}K_{m-r-i\,r+i}\text{ en }B_r=\sum_0^{m-r}{}_p\binom{r+p-1}{p}K_{p.r},$$

en der uit de ontwikkeling van de eene zoowel als van de andere voortgekomen som (waarin men de bovengrens, $< \frac{l}{a} - r$, weder door de oorspronkelijke $p = m - r$ vervangen mag), namelijk $B_r = \sum_{0}^{m-r} k (-)^k \binom{m}{r+k} \binom{r+k-1}{k} K_{0.r+k}$.

Indien men toch voor de gelijkvormigheid in deze drie formulen opvolgend de veranderlijken i, p en k vervangt door dezelfde notatie $k - r$; indien men dan de in de beide eerste formulen voorkomende kansen $K_{m-k.k}$ en $K_{k-r.r}$ door middel van de algemeene formule $K_{p.r} = K_{0.r} (1 - K_{0.1})^p$ uitdrukt in $K_{0.1}$ of stel kortheidshalve K; en indien men tegelijkertijd eene symbolische deeling door $K_{0.r}$ uitvoert, heeft men te bewijzen de dubbele gelijkheid

$$\left(symb. \frac{B_r}{K_{0.r}} = \right) \sum_{r}^{m} k \binom{m}{k} K^{k-r} (1-K)^{r-k} = \sum_{r}^{m} k \binom{k-1}{k-r} (1-K)^{k-r} =$$

$$= \sum_{r}^{m} k \binom{m}{k} \binom{k-1}{k-r} (-K)^{k-r}.$$ En van deze geeft men zich nu dadelijk rekenschap bij voorbeeld door onderlinge gelijkstelling der coëfficienten van x^{m-r} in de ontwikkeling der dubbele identiteit $\frac{\{1 + (1-K)x\}^m}{1 - Kx} = \frac{\{1 + (1-K)x\}^{m-1}}{1 - \frac{x}{1+(1-K)x}} =$

$$= \frac{\{(1 - Kx) + x\}^m}{1 - Kx},$$ indien men daarin namelijk het eerste lid schrijft onder den vorm

$$\left(\sum_{0}^{\infty} k-r \, K^{k-r} x^{k-r} \right) \left\{ \sum_{m}^{0} k \binom{m}{k} (1 - K)^{m-k} x^{m-k} \right\},$$

het tweede lid onder den vorm

$$\sum_{m}^{-\infty} k \, \{x^{m-k} (1 + (1-K)x)^{k-1}\} = \sum_{m}^{-\infty} k \left\{ x^{m-k} \sum_{k}^{1} r \binom{k-1}{k-r} (1-K)^{k-r} x^{k-r} \right\},$$

en het derde lid onder den vorm

$$\overset{0}{\underset{m}{\sum}}{}_k \binom{m}{k}(1-Kx)^{k-1}x^m \;{}^k\!= \overset{0}{\underset{m}{\sum}}{}_k \left\{\binom{m}{k}x^{m-k}\overset{1}{\underset{k}{\sum}}{}_r \binom{k-1}{k-r}(-K)^{k-r}x^{k-r}\right\}.$$

Nadat in het vorenstaande de kans A_r voor juist r segmenten $>a$ en de kans $A_{>r-1}$ of B_r voor minstens r segmenten $>a$ zijn opgemaakt, ligt het voor de hand nu ook de formule voor de kans van hoogstens r segmenten $>a$ neder te schrijven. Daarvoor komt, door in de formule voor B_r — ten einde weder den aanwijzer $r+k$ onveranderd aan te houden — tegelijk met de vervanging van r door $r+1$ ook de notatie k van den veranderlijken aanwijzer te vervangen door $k-1$,

$$A_0+A_1+\ldots\ldots+A_{r-1}+A_r=A_{<r}+A_r=A_{<r+1}=1-B_{r+1}=$$

$$=1-\overset{<\frac{l}{a}-r}{\underset{1}{\sum}}{}_k (-)^{k-1}\binom{m}{r+k}\binom{r+k-1}{k-1}\left(\frac{l-(r+k)a}{l}\right)^{m-1}.$$

En in verband hiermede heeft men tevens de formule voor meer dan r segmenten $>a$

$$A_{>r}=B_{r+1}=\overset{<\frac{l}{a}-r}{\underset{1}{\sum}}{}_k (-)^{k-1}\binom{m}{r+k}\binom{r+k-1}{k-1}\left(\frac{l-(r+k)a}{l}\right)^{m-1};$$

en de formule voor minder dan r segmenten $>a$

$$A_{<r}=1-B_r=1-\overset{<\frac{l}{a}-r}{\underset{0}{\sum}}{}_k (-)^{k}\binom{m}{r+k}\binom{r+k-1}{k}\left(\frac{l-(r+k)a}{l}\right)^{m-1};$$

wier som, opgeteld bij

$$A_r=\overset{<\frac{l}{a}-r}{\underset{0}{\sum}}{}_k (-)^{k}\binom{m}{r+k}\binom{r+k}{k}\left(\frac{l-(r+k)a}{l}\right)^{m-1}$$

zelve, naar behooren — terwijl zij tegelijkertijd ter bevestiging strekt van $A_r=B_r-B_{r+1}$ — blijkt te voldoen aan $A_{>r}+A_r+A_{<r}=1$, omdat in $A_{<r}$ en in A_r de allereerste

termen (voor $k=0$) beiden gelijk $\binom{m}{r}\left(\frac{l-ra}{l}\right)^{m-1}$ zijn en dus tegen elkander wegvallen, terwijl voor iedere hoogere k de gezamenlijke coëfficient van $(-)^k\binom{m}{r+k}\left(\frac{l-(r+k)a}{l}\right)^{m-1}$ wordt $-\binom{r+k-1}{k-1}-\binom{r+k-1}{k}+\binom{r+k}{k}=0$.

Geheel overeenkomstige formulen als de vorenstaande voor segmenten, die grooter dan a verlangd worden, kan men ten slotte ook opschrijven voor segmenten, die kleiner dan a moeten zijn. Stellende de hierop betrekkelijke kansen ter onderscheiding door de letter A' in plaats van A voor, kan men in hoofdzaak volstaan met de opmerking, dat, als er juist r segmenten $>a$ zijn, er dan tevens juist $m-r$ segmenten $<a$ voorkomen. Zoodoende beschikt men dadelijk over het volgende stel formulen

$$A'_r = A_{m-r} = \binom{m}{r}\sum_{0}^{<\frac{l}{a}-m+r} k\,(-)^k\binom{r}{k}\left(\frac{l-(m-r+k)a}{l}\right)^{m-1} =$$

$$=\sum_{0}^{<\frac{l}{a}-m+r} k\,(-)^k\binom{m}{r-k}\binom{m-r+k}{k}\left(\frac{l-(m-r+k)a}{l}\right)^{m-1},$$

$$A'_{>r-1} = A_{<m-r+1} = 1 - B_{m-r+1} =$$

$$=1-\sum_{1}^{<\frac{l}{a}-m+r} k\,(-)^{k-1}\binom{m}{r-k}\binom{m-r+k-1}{k-1}\left(\frac{l-(m-r+k)a}{l}\right)^{m-1},$$

$$A'_{<r+1} = A_{>m-r-1} = B_{m-r} =$$

$$=\sum_{0}^{<\frac{l}{a}-m+r} k\,(-)^k\binom{m}{r-k}\binom{m-r+k-1}{k}\left(\frac{l-(m-r+k)a}{l}\right)^{m-1},$$

$$A'_{>r} = A_{<m-r} = 1 - B_{m-r} =$$

$$=1-\sum_{0}^{<\frac{l}{a}-m+r} k\,(-)^k\binom{m}{r-k}\binom{m-r+k-1}{k}\left(\frac{l-(m-r+k)a}{l}\right)^{m-1},$$

$$A'_{<r} = A_{>m-r} = B_{m-r+1} =$$

$$= \sum_{1}^{<\frac{l}{a}-m+r} k\,(-)^{k-1} \binom{m}{r-k} \binom{m-r+k-1}{k-1} \left(\frac{l-(m-r+k)\,a}{l}\right)^{m-1}.$$

Overgaande tot eene tweede toepassing van de algemeene in den aanhef dezes ontwikkelde formulen, stellen wij ons de vraag: de kans te bepalen, dat onder de m segmenten, waarin weder eene gegeven lijn l wordt verdeeld, p segmenten, te voren in rangnummer aangewezen, buiten de gegeven grenzen a en b liggen (dat wil, voor $a < b$, zeggen: ieder op zich zelf òf $< a$, òf $> b$ zijn), en r evenzeer aangewezen segmenten binnen diezelfde grenzen liggen (dus ieder zoowel $> a$ als $< b$ zijn), terwijl de grootte der dan nog overblijvende $m - p - r$ segmenten geheel in het onbepaalde wordt gelaten. De bedoelde kans weder noemende $K_{p.r}$, heeft men ook nu, even goed als in het voorgaande voorbeeld, de symbolische formule $K_{p.r} = K_{p-1.r}\,(1 - K_{0.1})$ en dus ook door p opvolgende aanwendingen hiervan evenzeer

$$K_{p\,r} = K_{0.r}\,(1 - K_{0.1})^p = \sum_{0}^{p} i\,(-)^i \binom{p}{i} K_{0.r+i}.$$

En de thans gestelde vraag hangt dus af van de berekening van $K_{0.r+i}$, dat wil zeggen van de kans dat een aantal van $r + i$ aangewezen segmenten ieder $> a$ en $< b$ zijn, terwijl alle overigen willekeurig in grootte blijven; welke kans slechts kan voorkomen bij die verdeelingen, die in werkelijkheid $r + i$ aangewezen segmenten $> a$ vertoonen, maar dan ook, bij vermindering van ieder dezer $r + i$ segmenten met a, en dus van de geheele lijn l met $(r + i)\,a$, blijkbaar dezelfde is als de kans, dat onder de m segmenten van eene lijn $l - (r + i)\,a$ er $r + i$ aangewezene $< b - a$ en alle overigen van willekeurige grootte voorkomen. Het blijkt alzoo, dat men voor de berekening van deze zamengestelde kans $K_{0.r+i}$ een tweeledig nuttig gebruik kan maken van de formulen in ons eerste voorbeeld uitgewerkt: in de eerste plaats

namelijk van de aldaar in den aanvang opgestelde $K_{0.r+k}$, waarin slechts de notatie $r+k$ te vervangen is door $r+i$; in de tweede plaats van de als bijzonder geval $r=0$ in de aldaar voorkomende $K_{p.r}$ begrepen formule

$$K_{p.0}=\sum_{0}^{<\frac{l}{a}} k\,(-)^k \binom{p}{k} \left(\frac{l-k\,a}{l}\right)^{m-1},$$

waarin echter eene meer ingrijpende vervanging vereischt wordt, te weten van l door $l-(r+i)\,a$, van p door $r+i$ en van a door $b-a$. Deze vervangingen aanbrengende en het product der beide uitkomsten nemende, wordt in ons geval

$$K_{0.r+i}=\left(\frac{l-(r+i)a}{l}\right)^{m-1} \sum_{0}^{<(l-(r+i)a):(b-a)} k(-)^k \binom{r+i}{k} \left(\frac{l-(r+i)a-k(b-a)}{l-(r+i)\,a}\right)^{m-1} =$$

$$=\sum_{0}^{<(l-(r+i)a):(b-a)} k\,(-)^k \binom{r+i}{k} \left(\frac{l-(r+i-k)\,a-k\,b}{l}\right)^{m-1};$$ en ten

slotte vindt men door substitutie hiervan, en inachtnemende dat als vroeger $l-(r+i)\,a>0$ of $i<\frac{l}{a}-r$ weder een vereischte voor de toepasselijkheid is, de verlangde

$$K_{p.r}=\sum_{0}^{<\frac{l}{a}-r} i(-)^i \binom{p}{i} \sum_{0}^{<(l-(r+i)a):(b-a)} k(-)^k \binom{r+i}{k} \left(\frac{l-(r+i-k)a-kb}{l}\right)^{m-1}.$$

(Zie hiervan eene toepassing op de kans K' in het volgende opstel).

Deze formule onderscheidt zich in algemeenen vorm van de overeenkomstige $K_{p.r}$ van het voorgaande meer eenvoudige voorbeeld slechts doordien elke op zich zelf staande $(m-1)^e$-machts-term van toen, thans in eene stelkundige som van dergelijke termen is overgegaan; tevens gaat zij naar behooren in die vroegere formule zelve weder over door de tegenwoordige bovengrens b der segmenten gelijk aan of grooter dan de lijn l zelve te onderstellen, hetgeen feitelijk op het opheffen van deze bovengrensbepaling nederkomt (in

dat geval toch mag wegens $k < \frac{l-(r+i)a}{b-a} \lesseqgtr \frac{l-(r+i)a}{l-a} < 1$ alleen de term voor $k=0$, dat is $\left(\frac{l-(r+i)\,a}{l}\right)^{m-1}$, dienst doen en neemt dus, wat volkomen onverschillig is, de notatie i thans slechts de plaats in van de vroegere k). En overigens zijn omtrent de tegenwoordige formule nog geheel overeenkomstige opmerkingen in het midden te brengen als omtrent die vroegere. Bij voorbeeld vooreerst dat — indien bepaaldelijk $p = m - r$ genomen wordt, en dus ook de binomiaal-coëfficienten $\binom{p}{i}$ door $\binom{m-r}{i}$ worden vervangen — de kans komt voor juist r segmenten (altijd weder met te voren vastgestelde rangnummers) ieder $> a$ en $< b$. Ten tweede dat, als in plaats van aangewezen segmenten, een onveranderd aantal, maar willekeurig geplaatste, van iedere soort bedoeld worden, de gevonden algemeene $K_{p.r}$ nog met $\frac{m!}{p!\,r!\,(m-p-r)!}$, de evenbedoelde bijzondere $K_{m-r.r}$ nog met $\binom{m}{r}$, vermenigvuldigd moet worden. Ten derde dat men in denzelfden trant als vroeger nu ook formulen kan opschrijven voor de kansen dat, in plaats van juist r segmenten, daarentegen minstens r, of hoogstens r, of meer dan r, of minder dan r segmenten $> a$ en tevens $< b$ zullen zijn; alsook voor de kansen, dat deze aantallen betrekking zullen hebben op de segmenten, die, in plaats van binnen, buiten diezelfde grenzen liggen; al welke kansen, die wij kortheidshalve niet voluit nederschrijven, zich in hoofdzaak weder van de vroegere overeenkomstigen onderscheiden door vervanging telkens van enkele termen door sommen van termen.

Ingeval de speelruimte $b - a$ tusschen de beide grenzen — waarbuiten in het vorenstaande de p segmenten, en waarbinnen de r segmenten zich moeten bewegen — gering is, kan men met voordeel de voor $K_{0.r+i}$ gevonden formule, en dan ook alle anderen, die uit de substitutie van deze zijn voortgevloeid, door benaderingsformulen vervangen; ten minste in die gevallen, waarin de bovengrens van de veranderlijke

k in $K_{0.r+i}$ toelaat, dat het stel der binomiaal-coëfficienten $\binom{r+i}{k}$ van de $(r+i)^e$ macht aldaar volledig optreedt, dat is in die gevallen, waarin $(l-(r+i)\,a):(b-a) \overline{\overline{>}}\, r+i$ of $l \overline{\overline{>}} (r+i)\,b$ is. Dan toch stelt in

$$K_{0.r+i} = \frac{1}{\lfloor m-1}\sum_{0}^{r+i} k\,(-)^k \binom{r+i}{k} (l-(r+i)\,a-k\,(b-a))^{m-1}$$

de volledige Σ-term steeds — ook al zou $b-a$ nu juist niet zulk eene geringe waarde hebben — niets anders voor dan den eersten term van de rij der $(r+i)^e$ verschillen van de rekenkundige reeks der $(m-1)^e$ orde, bestaande uit de $(m-1)^e$ machten der termen van de gewone rekenkundige reeks, die met $l-(r+i)\,a-(r+i)\,(b-a) = l-(r+i)\,b$ begint en met $(b-a)$ opklimt, en waarvan dus de $(r+i+1)^e$ term is $l-(r+i)\,a$; of, wat hetzelfde zegt, die Σ-term is de $(r+i)^e$ eindige differentie van de functie $(l-(r+i)\,a)^{m-1}$, wanneer hierin de veranderlijke $l-(r+i)\,a$ telkens met gelijke verschillen $(b-a)$ opklimt. Is nu $(b-a)$ klein, dan merke men op, dat in het algemeen bij voorbeeld uit $y=f(x)$, voor aangroeiingen Δx klein genoeg om daarvan de hoogere tegen de lagere machten te mogen verwaarloozen, volgt niet alleen $\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x$, maar dan ook, juist op grond hiervan,

$\Delta^n y = \Delta\,.\,\Delta^{n-1} y = \frac{d\,.\,\Delta^{n-1} y}{dx}\Delta x = \frac{\Delta^{n-1}\,dy}{dx}\Delta x$, dus weder $= \frac{\Delta^{n-2}\,d^2 y}{dx^2}\Delta x^2 =$ enz. $= \frac{d^n y}{dx^n}\Delta x^n$; en dus in ons geval deze benaderingsformule toepassende op $y = x^{m-1} = (l-(r+i)\,a)^{m-1}$, $\Delta x = (b-a)$, $n = r+i$, komt evenzoo als benadering $K_{0.r+i} = \frac{1}{\lfloor m-1}\Delta^{r+i}(l-(r+i)\,a)^{m-1} =$

$$= \frac{1}{\lfloor m-1}\,\frac{d^{r+i}(l-(r+i)\,a)^{m-1}}{(d\,(l-(r+i)\,a))^{r+i}}\,(b-a)^{r+i} =$$

$$= (m-1)\,(m-2)\ldots(m-r-i)\,\frac{(l-(r+i)\,a)^{m-r-i-1}}{\lfloor m-1}\,(b-a)^{r+i};$$

welke waarde, die zooals gezegd nu ook in $K_{p.r}$ enz. kan

gesubstitueerd worden, minder van de nauwkeurige zal afwijken, naarmate $b - a$ meer tot eene oneindig kleine nadert.

Zoowel in het eerste als in het tweede behandelde voorbeeld moesten alle mogelijke segmenten van de lijn l, zelfs de $m - p - r$ segmenten, omtrent wier grootte van te voren geen bepaalde eisch werd gesteld, noodwendig behooren tot eene der beide beschouwde en elkander volledig aanvullende groepen (namelijk in het eerste voorbeeld de groep $< a$ en de groep $> a$, in het tweede voorbeeld de groep buiten a en b en de groep binnen a en b); en juist dit was de reden, dat men bij de toepassing van onze algemeene formulen op deze twee voorbeelden telkens slechts met de ontwikkeling der macht van een binomium te doen had. Is echter het aantal der elkander aanvullende groepen grooter dan twee — en in dit geval verkeert men dus in wezenlijkheid ook, telkens als er wel van slechts twee groepen sprake is, maar die niet het geheele zamenstel van alle mogelijke segmenten omvatten — dan wijst, naar wij meenen, de aanhef van dit opstel er reeds op heen, dat men in het algemeen tot machtsverheffing van zeker polynomium moet overgaan, waardoor de verdere uitwerking natuurlijk zamengestelder zal worden. Toch kan men ook soms in dergelijke gevallen, bij voorbeeld wanneer zij op eenigerlei wijze een geschikt aansluitingspunt aan onze voorgaande toepassingen vertoonen, met eene meer beknopte berekening volstaan; tot staving waarvan wij ten besluite nog een paar vragen van dezen aard willen onderzoeken.

Stel, in de eerste plaats, dat p weder aangewezen segmenten, niet zooals in ons tweede voorbeeld ieder onverschillig $< a$ of $> b$ verlangd worden, maar thans allen bepaaldelijk $> b$ moeten zijn, terwijl overigens als toen r aangewezen segmenten allen $> a$ en $< b$ en alle overblijvende $m-p-r$ segmenten van willekeurige grootte moeten wezen; het is dus nu zoo goed, alsof het aantal segmenten, die stellig

in de derde mogelijke groep, namelijk $< a$, verlangd worden, nul bedraagt. Door nu eene vermindering van ieder der $p+r$ genoemde segmenten met a, en bijgevolg van de geheele lijn l met $(p+r)\,a$, te hulp te roepen, kan men zeggen, dat de kans voor eene verdeeling van den thans omschreven aard gelijk is aan het product van de kans, dat de lijn l verdeeld is in $p+r$ aangewezen segmenten $> a$ en in $m-p-r$ willekeurige segmenten, met de kans, dat de lijn $l-(p+r)\,a$ verdeeld is in p aangewezen segmenten $> b-a$, r aangewezen segmenten $< b-a$ en $m-p-r$ willekeurige segmenten; derhalve, uitgedrukt in de notatie van ons eerste voorbeeld, gelijk aan $K_{0.p+r}$ (voor l en a) maal $K_{r.p}$ (voor $l-(p+r)\,a$ en $b-a$); dat is gelijk aan

$$\left(\frac{l-(p+r)a}{l}\right)^{m-1}\sum_{0}^{<(l-(p+r)a):(b-a)-p} k(-)^k\binom{r}{k}\left(\frac{l-(p+r)a-(p+k)(b-a)}{l-(p+r)\,a}\right)^{m-1}=$$

$$=\sum_{0}^{<(l-ra-pb):(b-a)} k\,(-)^k\binom{r}{k}\left(\frac{l-(r-k)\,a-(p+k)\,b}{l}\right)^{m-1}.$$ Deze formule, meer bepaaldelijk in het geval $p=m-r$, als wanneer er geene segmenten van willekeurige grootte overblijven, zal ons in het onmiddellijk volgende opstel (zie de aldaar door K''' voorgestelde kans) van dienst zijn. Voor segmenten van willekeurige in plaats van aangewezen rangnummers is zij als vroeger weder met $\dfrac{m!}{p!\,r!\,(m-p-r)!}$, of in het evengenoemde bijzondere geval $p=m-r$ met $\binom{m}{r}$, te vermenigvuldigen.

Tweede vraag: Hoe groot is de kans, dat p aangewezen segmenten, weder niet ieder hetzij $< a$ of $> b$, maar thans allen $< a$ zullen zijn, één aangewezen segment (en niet zooals vroeger r) $> a$ en $< b$, en de overblijvende $m-p-1$ segmenten van willekeurige grootte? Deze kans is blijkbaar de overmaat van die voor p aangewezen segmenten $< a$, één aangewezen $> a$, overigen willekeurig, boven de kans voor p aangewezen segmenten $< a$, één aangewezen $> b$,

overigen willekeurig. En deze laatste kans is als zamengestelde kans weder te bepalen door het op zich zelf staande segment — aangenomen vooreerst, dat het werkelijk $> b - a$ is — te verminderen, evenals diensvolgens de gegeven lijn l zelve, met $b-a$, waardoor dus de nieuwe lijn $l-(b-a)$, bij onveranderde overige segmenten, één aangewezen segment $> a$ komt te bevatten. Derhalve, weder in de notatie van ons eerste voorbeeld, wordt de thans gezochte kans uitgedrukt door $K_{p}.1$ (voor l en a) — $\{K_{0}.1$ (voor l en $b-a$) maal $K_{p}.1$ (voor $l-(b-a)$ en $a)\} =$

$$= \sum_{0}^{<\frac{l}{a}-1} k (-)^k \binom{p}{k} \left(\frac{l-(1+k)a}{l}\right)^{m-1} -$$

$$-\left(\frac{l-(b-a)}{l}\right)^{m-1} \sum_{0}^{<(l-(b-a)):a-1} k(-)^k \binom{p}{k} \left(\frac{l-(b-a)-(1+k)a}{l-(b-a)}\right)^{m-1} =$$

$$= \sum_{0}^{<\frac{l}{a}-1} k(-)^k \binom{p}{k} \left(\frac{l-(1+k)a}{l}\right)^{m-1} - \sum_{0}^{<(l-b):a} k(-)^k \binom{p}{k} \left(\frac{l-ka-b}{l}\right)^{m-1}.$$

Ingeval van willekeurige in plaats van aangewezen rangnummers ook hier dezelfde vermenigvuldiging als zoo even. (Zie ook van deze formule weder eene toepassing op de in het volgende opstel voorkomende kans $K'K''$).

Worden in deze tweede vraag niet één, maar r segmenten $> a$ en $< b$ verlangd, dan is eene dergelijke vrij beknopte berekening niet wel mogelijk. In dat geval toch blijven — door van alle verdeelingen met r aangewezen segmenten $> a$ weg te nemen al dezulke, waarin die segmenten zelfs $> b$ zijn — niet noodwendig, als zoo even, alleen diegene over, waarin diezelfde segmenten allen tusschen a en b liggen, maar bovendien al diegene, waarin slechts sommige dezer segmenten tusschen a en b vallen, en de overigen $> b$ zijn. Naar het schijnt zou voor dit vraagstuk alzoo de ontwikkeling der macht van een trinomium noodig zijn, waarin wij ons echter niet zullen begeven.

OVER DE KANS DAT, BIJ WILLEKEURIGE VERDEELING VAN EENE GEGEVEN RECHTE LIJN, UIT DE SEGMENTEN GESLOTEN VEELHOEKEN KUNNEN WORDEN GEVORMD,

DOOR

F. J. VAN DEN BERG.

In het »Bulletin de la société mathématique de France, Tome I, 1872—73", vindt E. Lemoine op blz. 39—40 dat, als eene staaf in drie deelen gebroken wordt, de kans, dat uit deze deelen als zijden een driehoek kan worden gevormd, bedraagt $\frac{1}{4}$; terwijl Halphen op blz. 221—224 (waarnaar ook reeds in mijn onmiddellijk voorgaand opstel verwezen werd) zoowel door redeneering als door integraalrekening tot het besluit komt dat, wanneer meer in het algemeen eene staaf in n deelen gebroken wordt, de kans, dat deze deelen een gesloten n-hoek kunnen vormen, gelijk $1 - \frac{n}{2^{n-1}}$ is.

Ik stel mij voor, in het tegenwoordig opstel te onderzoeken, hoe groot de kans is dat, bij willekeurige verdeeling van eene gegeven rechte lijn l in een gegeven aantal m segmenten, uit iedere groep van een bepaald aantal dezer segmenten — welk aantal ik, om de einduitkomst onder meer beknopten vorm te verkrijgen, van den aanvang af, liever dan door eene enkele letter, door de notatie $m - n + 2$ zal aanduiden—

telkens een gesloten ($m - n + 2$)-hoek kan worden zamengesteld; of eigenlijk, de bedoelde kans als bijzonder geval af te leiden uit die voor een zoo dadelijk te omschrijven nog algemeener vraagstuk. Bij de zoo even gestelde vraag is blijkbaar een vereischte, en een op zich zelf genoegzaam vereischte, dat de som van elke $m - n + 1$ segmenten grooter zij dan elk van de overige $n - 1$ segmenten; en dit zal steeds het geval zijn, zoodra voldaan is aan den hierin vervatten eisch, dat meer in het bijzonder de som der $m - n + 1$ kleinste van alle segmenten het allergrootste segment overtreft (zie hierover ook het slot van dit opstel). In plaats evenwel van hiervoor rechtstreeks de kans te gaan bepalen, stellen wij ons dadelijk op het meer algemeene standpunt, waarbij verlangd zou worden, dat de som der genoemde $m - n + 1$ kleinste segmenten niet, als zoo even, grooter is dan ieder der $n - 1$ overigen, maar slechts grooter dan weder een gegeven aantal p van dezen, en tevens kleiner dan ieder der alsdan nog overblijvende $n - p - 1$ segmenten.

De door $K_{m.n.p}$ aan te duiden kans, dat dit laatste geval zal voorkomen, kan onder anderen door integratie volgens twee veranderlijken, namelijk vooreerst de som y der $m - n + 1$ kleinste segmenten en ten andere het grootste segment z uit deze zelfde $m - n + 1$ segmenten, berekend worden. Denkt men zich toch zoowel de genoemde som veranderlijk tusschen zekere bepaalde waarde y en de onmiddellijk volgende $y + dy$, als ook telkens het genoemde grootste segment veranderlijk tusschen zekere z en $z + dz$, dan sluiten niet alleen de opvolgende groepen tusschen y en $y + dy$, maar evenzeer de opvolgende groepen tusschen z en $z + dz$, elkander uit; en juist hierom is de kans $K_{m.n.p}$ niet anders dan die men door eene dubbele sommatie of integratie, naar y en naar z — binnen de behoorlijke, zoo straks te bepalen, grenzen — verkrijgt uit de kans, dat tusschen y en $y + dy$ en tusschen z en $z + dz$ door de segmenten der lijn l aan den gestelden eisch voldaan worde. Deze laatste kans nu is weder te beschouwen als de zamengestelde kans of het product van de vier na te noemen kansen K, K', K'' en K''', in dier voege dat $K_{m.n.p} = \int\int K\, K'\, K''\, K'''$ wordt. Hierin stelt namelijk K

de kans voor, dat de som van $m - n + 1$ willekeurige uit de m segmenten van l — want door bovendien aan K', K'' en K''' te voldoen, zullen zij van zelf juist de $m - n + 1$ kleinste segmenten zijn — tusschen y en $y + dy$ ligt; K' de kans, dat één der $m - n + 1$ segmenten van y — en wél wegens K'' juist het grootste van dezen — tusschen z en $z + dz$ ligt; K'' de kans, dat de $m - n$ segmenten van de overblijvende $y - z$ allen $< z$ zijn; K''' eindelijk de kans, dat de overblijvende $l - y$ wordt verdeeld in p segmenten $> z$ en $< y$, en $n - p - 1$ segmenten $> y$.

Gaan wij dus over tot de afzonderlijke berekening van ieder dezer vier kansen.

In aanmerking nemende, dat het aantal verbindingen der m segmenten $m - n + 1$ aan $m - n + 1$ bedraagt $\binom{m}{m-n+1} = \binom{m}{n-1}$, is vooreerst de door K voorgestelde kans gelijk $\binom{m}{n-1}$-maal die, dat de som der $m - n + 1$ eerste of vooraangeplaatste segmenten van l tusschen y en $y + dy$ ligt, dat is gelijk $\binom{m}{n-1}$-maal de zamengestelde kans dat, gerekend van het tot oorsprong genomen uiteinde der lijn l, de abscissen der $m - n$ eerste aansluitings- of deelpunten vallen tusschen 0 en y, die van het enkele $(m - n + 1)^e$ deelpunt tusschen y en $y + dy$, die van de $n - 2$ overige deelpunten tusschen $y + dy$ en l. Denkt men zich nu weder, zooals in het voorgaande opstel, de lijn l zamengesteld uit een oneindig aantal $\frac{l}{\delta}$ gelijke elementen δ, dan moeten de eerstgenoemde abscissen zijn $m - n$ onderling verschillende uit de $\frac{y}{\delta}$ waarden δ, 2δ, 3δ, ..., y, zoodat het aantal onderlinge verbindingen van deze abscissen bedraagt $\binom{y:\delta}{m-n}$, dat is, wegens de oneindig kleine waarde van δ, $\frac{1}{(m-n)!}\left(\frac{y}{\delta}\right)^{m-n}$; evenzoo bedraagt het aantal verbindingen voor het op zich zelf staande

$(m-n+1)^e$ deelpunt $\binom{dy \cdot \delta}{1} = \frac{dy}{\delta}$, en dat voor de $n-2$ laatste deelpunten $\binom{(l-\delta-y-dy):\delta}{n-2} = \frac{1}{(n-2)!}\left(\frac{l-y}{\delta}\right)^{n-2}$. Het product van deze drie aantallen alsnu deelende door het overeenkomstige — trouwens reeds in het voorgaande opstel opgemaakte — aantal $\frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{l}{\delta}\right)^{m-1}$ verbindingen voor de geheel willekeurige verdeeling der geheele lijn l in m segmenten, is hiermede de formule $K:\binom{m}{n-1} = \frac{(m-1)!}{(m-n)!\,(n-2)!} \cdot \frac{y^{m-n}(l-y)^{n-2}\,dy}{l^{m-1}}$ verkregen, waarin niet alleen (zooals zich verwachten liet) de oneindig kleine δ van zelf verdwenen is, maar tevens — omdat de som van $m-n+1$ segmenten tusschen y en $y+dy$ medebrengt, dat de som der $n-1$ overige segmenten tusschen $l-y$ en $l-y-dy$ ligt — eene gelijktijdige verwisseling van $m-n+1$ en $n-1$, en van y en $l-y$, mogelijk is. Eene andere proef, die men desverkiezende op deze formule nemen kan, bestaat hierin dat, hoe men de lijn l ook in m segmenten verdeele, het beschouwde $(m-n+1)^e$ deelpunt in ieder geval tusschen 0 en l moet liggen, zoodat, ten opzichte van den veranderlijken afstand y, $\int_0^l \left\{K:\binom{m}{n-1}\right\} = \frac{(m-1)!}{(m-n)!\,(n-2)!}\,\frac{1}{l^{m-1}} \cdot \int_0^l y^{m-n}(l-y)^{n-2}\,dy = 1$ moet zijn; hetgeen dan ook bevestigd wordt door de herleidingsformule $\int_0^l \frac{y^{m-n}}{(m-n)!}\,\frac{(l-y)^{n-2}}{(n-2)!}\,dy =$

$$= \left[\frac{y^{m-n+1}}{(m-n+1)!}\,\frac{(l-y)^{n-2}}{(n-2)!} + \int \frac{y^{m-n+1}}{(m-n+1)!}\,\frac{(l-y)^{n-3}}{(n-3)!}\,dy\right]_0^l =$$

$$= \int_0^l \frac{y^{m-n+1}}{(m-n+1)!}\,\frac{(l-y)^{n-3}}{(n-3)!}\,dy, \text{ dus} = \int_0^l \frac{y^{m-n+2}}{(m-n+2)!}\,\frac{(l-y)^{n-4}}{(n-4)!}\,dy =$$

$$= \text{enz.} = \int_0^l \frac{y^{m-2}}{(m-2)!}\,dy = \frac{l^{m-1}}{(m-1)!} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

[In het voorbijgaan teekenen wij hier aan, dat het antwoord op de verwante vraag naar de kans, dat — zonder de diffe-

rentiaal dy ter sprake te brengen — het aansluitingspunt tusschen de twee gegeven deelen y en $l-y$ der lijn l bepaaldelijk op het $(m-n+1)^e$ segment zou liggen, volgens dezelfde redeneering gegeven wordt door de uitdrukking

$$\binom{y:\delta}{m-n}\binom{(l-\delta-y):\delta}{n-1}:\binom{(l-\delta):\delta}{m-1}=\frac{1}{(m-n)!}\left(\frac{y}{\delta}\right)^{m-n}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{l-y}{\delta}\right)^{n-1}:\frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{l}{\delta}\right)^{m-1}=\binom{m-1}{n-1}\frac{y^{m-n}(l-y)^{n-1}}{l^{m-1}},$$

dat is door den n^{den} term van de ontwikkeling van het binomium $\left(\frac{y}{l}+\frac{l-y}{l}\right)^{m-1}$; en dat, terwijl hier naar behooren eene gelijktijdige verwisseling van $m-n$ en $n-1$, en van y en $l-y$, mogelijk is, nu bovendien eene proef, thans niet ten opzichte van y, maar van n als veranderlijke, voor de hand ligt, in zoover namelijk de eindige som dezer uitdrukkingen of termen, van $n=1$ tot en met $n=m$ (welke som de kans aanwijst, dat het thans beschouwde vaste aansluitingspunt op onverschillig welk der m segmenten zal liggen) werkelijk niet anders is dan de volledige ontwikkeling van $\left(\frac{y+(l-y)}{l}\right)^{m-1}$, dat is de eenheid zelve.]

Overgaande tot de in de tweede plaats genoemde kans K', kan deze dadelijk als bijzonder geval uit de evengevondene K worden afgeschreven, waartoe slechts in deze K te vervangen is l door y, m door $m-n+1$, $m-n+1$ door 1, (dus $n-1$ door $m-n$), en y door z. Zoodoende komt

$$K':\binom{m-n+1}{m-n}=\frac{(m-n)!}{0!\,(m-n-1)!}\cdot\frac{z^0\,(y-z)^{m-n-1}}{y^{m-n}}\,dz,$$

dat is $K':(m-n+1)=(m-n)\dfrac{(y-z)^{m-n-1}\,dz}{y^{m-n}}$. En hiervan is tevens naar behooren het tweede lid vervat in de bij de tweede toepassing in ons voorgaand opstel voor $K_{p.r}$ ontwikkelde formule, wanneer men namelijk aldaar l verandert in y, m in $m-n+1$, p in 0, r in 1, a in z en b in $z+dz$, waardoor die formule — dat is in dit geval die voor $K_{0.1}$, of de aldaar voor $K_{0\,r+i}$ voorkomende voor $r+i=1$, dus $k=0, 1$ — wordt

$$K_{0.1}=\left(\frac{y-z}{y}\right)^{m-n}-\left(\frac{y-(z+dz)}{y}\right)^{m-n}=-d\left(\frac{y-z}{y}\right)^{m-n}=$$

$= (m - n)\left(\frac{y-z}{y}\right)^{m-n-1}\frac{dz}{y}$; zooals trouwens nog meer onmiddellijk komt uit de voor kleine $b - a$ aldaar ten slotte verkregen benaderingsformule voor $K_{0.r+i}$, die zich voor $r + i = 1$ vereenvoudigt tot $K_{0.1} = (m-1)\frac{(l-a)^{m-2}}{l^{m-1}}(b-a)$, dat is na de omschreven verandering van letters weder dezelfde.

Wat betreft de kans K'', deze is niet anders dan de in het voorgaande opstel als eerste toepassing berekende kans $A_r =$ $= \binom{m}{r} K_{m-r.r}$, bij vervanging wel te verstaan van l door $y - z$, $m = p$ door $m - n$, r door 0, en a door z. Men heeft alzoo, door bovendien den veranderlijken aanwijzer k ter onderscheiding van den in K''' aan te houden aanwijzer k thans liever i te noemen en door tevens in A_r om straks te vermelden reden de bovengrens $\frac{l}{a} - r$ van dezen k te veranderen in de oorspronkelijk voorkomende bovengrens $m - r$,

$$K'' = \sum_{0}^{m-n}{}_i (-)^i \binom{m-n}{i}\left(\frac{y-(i+1)z}{y-z}\right)^{m-n-1}.$$

[In verband met de evengevonden K' wordt alzoo de zamengestelde kans of het product $K' K'' = (m - n + 1)(m - n)$. $. \frac{dz}{y^{m-n}} \sum_{0}^{m-n}{}_i (-)^i \binom{m-n}{i} (y - (i+1)z)^{m-n-1}$, welke kans, betrekking hebbende op de verdeeling van de lijn l in $m-n$ segmenten $< z$ en één segment $> z$ en $< z + dz$, trouwens ook onmiddellijk had kunnen worden afgeschreven uit die voor de laatste vraag van het voorgaande opstel, alwaar dan namelijk in het tegenwoordige geval l wordt y, m wordt $m - n + 1$, p wordt $m - n$, a wordt z, en b wordt $z + dz$. Immers, zoodoende gaat de aldaar gevonden uitdrukking — vermenigvuldigd (zooals toen gezegd, wegens de beschouwing van aangewezen in plaats van willekeurige rangnummers der segmenten) met $\frac{m!}{p!\,1!\,(m-p-1)!}$, dat is thans $(m - n + 1)$, en

bij vervanging weder van de notatie k door i, en van de beide alsnu zamenvallende bovengrenzen $\frac{l}{a} - 1$ en $(l-b):a$ van k door p of $m-n$, — over in $(m-n+1)\sum_0^{m-n} i\,(-)^i\binom{m-n}{i}.$

$$.\left\{\left(\frac{y-(1+i)\,z}{y}\right)^{m-n} - \left(\frac{y-(1+i)\,z-dz}{y}\right)^{m-n}\right\} =$$

$$=(m-n+1)\sum_0^{m-n} i\,(-)^i\binom{m-n}{i}\frac{(m-n)\,(y-(1+i)\,z)^{m-n-1}\,dz}{y^{m-n}},$$

dat is werkelijk de waarde $K'K''$ van zoo even.]

De kans K''' eindelijk komt te voorschijn, wanneer men in de uitdrukking, verkregen voor de voorlaatste vraag van het voorgaande opstel, genomen zooals aldaar gezegd voor $p = m - r$ en alsdan met $\binom{m}{r}$ vermenigvuldigd, l verandert in $l-y$, m in $n-1$, p in $n-p-1$, b in y, r in p, en a in z. Zoodoende verkrijgt men, na ook hier de bovengrens $(l-ra-pb)$: $:(b-a)$ van de veranderlijke k eerst weder vervangen te hebben door de oorspronkelijke bovengrens r, de formule

$$K''' = \binom{n-1}{p}\sum_0^p k\,(-)^k\binom{p}{k}\left(\frac{l-(n-p+k)\,y-(p-k)\,z}{l-y}\right)^{n-2},$$

of liever nog, door met het oog op de verdere berekening in plaats van deze veranderlijke k de notatie $-(n-p)+k$ te stellen, $K''' = \binom{n-1}{p}\sum_{n-p}^{n} k\,(-)^{-n+p+k}\binom{p}{n-k}.$

$$.\left(\frac{l-k\,y-(n-k)\,z}{l-y}\right)^{n-2}.$$

Substitueert men nu de voor K, K', K'' en K''' gevonden waarden, past men daarbij den algemeenen regel $(\Sigma a)\,(\Sigma b) =$ $= \Sigma\,(a\,\Sigma\,b)$ toe, en zet men tegelijk de volgorde der twee te verrichten eindige sommatiën en der twee integratiën om, dan is de uitdrukking

$$K_{m.n.p} = \int\int K\, K'\, K''\, K''' =$$

$$= \binom{m}{n-1} \frac{(m-1)!}{(m-n)!\,(n-2)!} (m-n+1)(m-n) \binom{n-1}{p} \frac{1}{l^{m-1}} \,.$$

$$. \sum_{n-p}^{n} {}^{k} \Big\{ (-)^{-n+p+k} \binom{p}{n-k} \sum_{0}^{m-n} {}^{i} (-)^{i} \binom{m-n}{i} .$$

$$. \int d\,y \int (y-(i+1)\,z)^{m-n-1}\,(l-k\,y-(n-k)\,z)^{n-2}\,d\,z \Big\}$$

verkregen, waarin thans allereerst de zoowel aan y als aan z toe te kennen grenzen dienen te worden bepaald; welke grensbepaling, juist tengevolge van de evengenoemde verschikking der teekens Σ en $\int$, om zoo te zeggen in de plaats treedt van degene, die voor de aanwijzers i in K'' en k in K''' werd aangebracht in het voorgaande opstel, maar bij de overname van deze K'' en K''' uit dat opstel weder door de oorspronkelijke of volle bovengrensbepaling ($i = m - n$ en $k = n$) werd vervangen. Immers, uit het bij het opmaken van de kans A_r in het voorgaande opstel gezegde zal het duidelijk zijn, dat de eenige beperking, waaruit in wezenlijkheid de grensbepaling voortvloeit, hierin bestaat dat de overmaat, wier beschouwing tot de kansberekening leidt — aanvankelijk was deze overmaat $l - (r + k)\,a$, evenals zij thans in K'' bleek gelijk $y - (i + 1)\,z$ en in K''' gelijk $l - k\,y - (n - k)\,z$ te zijn — steeds positief behoort te blijven. En terwijl nu vroeger, zoolang men met geene veranderlijken y en z te doen had, deze voorwaarde eigenaardig diende om de hoogste toe te laten waarden van de aanwijzers i en k te bepalen, brengt thans de veranderlijkheid van y en z in verband met het vooropstellen der beide Σ-teekens mede, dat men telkens, voor iedere bepaalde i en k op zich zelf, nagaat binnen welke grenzen y en z zich daartoe behooren te bewegen. Voor zoover z betreft, deze moet dus zoowel $< \frac{y}{i+1}$ als $< \frac{l-k\,y}{n-k}$ blijven, van welke beide grenzen telkens de laagste behoort te worden aangehouden; en neemt men nu in aanmerking, vooreerst dat $\frac{y}{i+1} \lesseqgtr \frac{l-k\,y}{n-k}$ is, naarmate van $y \lesseqgtr \frac{(i+1)\,l}{n+i\,k}$, ten

andere dat de beteekenis zelf van z als grootste der $m-n+1$ segmenten van y steeds vordert $z > \frac{y}{m-n+1}$, dan blijkt dat men met twee verschillende gevallen te doen heeft, namelijk met $\frac{y}{m-n+1} < z < \frac{y}{i+1}$, zoolang $0 < y < \frac{(i+1)\,l}{n+ik}$ is (waarin deze rechtstreeks reeds bekende ondergrens 0 voor y bovendien volgt uit de onderlinge vergelijking der onder- en der bovengrens van z), en met $\frac{y}{m-n+1} < z < \frac{l-ky}{n-k}$, zoolang $\frac{(i+1)\,l}{n+ik} < y < \frac{(m-n+1)\,l}{n+(m-n)\,k}$ is (waarin evenzeer deze bovengrens voor y volgt uit de onderlinge vergelijking der beide grenzen van z, terwijl deze zelfde bovengrens naar behooren wegens $k > n-p$ tevens ligt binnen die, welke uit de verdeeling van de geheele lijn l in eene som y van $m-n+1$ segmenten, in p verdere segmenten ieder $> z > \frac{y}{m-n+1}$, en in $n-p-1$ segmenten ieder $> y$ voortvloeit, namelijk $y + \left(> \frac{py}{m-n+1}\right) + (>(n-p-1)y) = l$, dat is $y < \frac{(m-n+1)\,l}{n+(m-n)(n-p)}$.)

Men zou op grond hiervan de boven aangewezen dubbelintegraal hebben uit te werken als de som van twee bepaalde integralen, wier grensaanduiding zou zijn

$$\int_0^{\frac{(i+1)\,l}{n+ik}} dy \int_{\frac{y}{m-n+1}}^{\frac{y}{i+1}} (\ldots)\, dz + \int_{\frac{(i+1)\,l}{n+ik}}^{\frac{(m-n+1)\,l}{n+(m-n)\,k}} dy \int_{\frac{y}{m-n+1}}^{\frac{l-ky}{n-k}} (\ldots)\, dz.$$

Maar voor de werkelijke uitrekening schijnt het verkieslijk den eersten van deze beide termen te verminderen, en daarentegen den tweeden te vermeerderen, met

$$\int_0^{\frac{(i+1)\,l}{n+ik}} dy \int_{\frac{y}{m-n+1}}^{\frac{l-ky}{n-k}} (\ldots)\, dz,$$ waardoor die grensaanduiding wordt

$$-\int_0^{\frac{(i+1)l}{n+ik}} dy \int_{\frac{y}{i+1}}^{\frac{l-ky}{n-k}} (\ldots)\, dz + \int_0^{\frac{(m-n+1)l}{n+(m-n)k}} dy \int_{\frac{y}{m-n+1}}^{\frac{l-ky}{n-k}} (\ldots)\, dz,$$

zoodat, als men nu voor een oogenblik ter bekorting de notatiën $L = \frac{l}{n-k}$, $A = \frac{k}{n-k}$, $B = \frac{1}{m-n+1}$ en $C = \frac{1}{i+1}$ invoert, de waarde moet berekend worden van

$$K_{m.n.p} = \binom{m}{n-1}(m-1)!\;(m-n+1)\binom{n-1}{p}\frac{1}{l^{m-1}}\cdot$$

$$\cdot\sum_{n-p}^{n}{}_{k}\Big[(-)^{-n+p+k}\binom{p}{n-k}\sum_{0}^{m-n}{}_{i}(-)^{i}\binom{m-n}{i}(i+1)^{m-n-1}.$$

$$.\,(n-k)^{n-2}\Big\{-\int_0^{\frac{L}{A+C}} dy \int_{Cy}^{L-Ay} dz + \int_0^{\frac{L}{A+B}} dy\,.$$

$$.\int_{By}^{L-Ay} dz\Big\}\frac{(Cy-z)^{m-n-1}}{(m-n-1)!}\cdot\frac{(L-Ay-z)^{n-2}}{(n-2)!}\Big],$$

alwaar namelijk de aangewezen dubbel-integratiën beide betrekking hebben op de daarachter geplaatste functie van y en z. Door de uitgevoerde grensvervorming heeft men alsnu het voordeel, dat de eerste dezer integralen niet anders is dan hetgeen, waarin de tweede of meer algemeene in het bijzondere geval $B = C$ overgaat: reden, waarom men met de uitrekening van deze tweede kan volstaan. Daartoe kan de herleidingsformule $\int_0^{\frac{L}{A+B}} dy \int_{By}^{L-Ay} \frac{(Cy-z)^{m-n-1}}{(m-n-1)!}\,.$

$$.\,\frac{(L-Ay-z)^{n-2}}{(n-2)!}\,dz = -\int_0^{\frac{L}{A+B}} dy\left[\frac{(Cy-z)^{m-n-1}}{(m-n-1)!}\,.\right.$$

$$\left.\cdot\,\frac{(L-Ay-z)^{n-1}}{(n-1)!} + \int\frac{(Cy-z)^{m-n-2}}{(m-n-2)!}\,\frac{(L-Ay-z)^{n-1}}{(n-1)!}\,dz\right]_{By}^{L-Ay}$$

dienen, waarin de eerste term van het tweede lid

$$=+\int_0^{\frac{L}{A+B}} dy\, \frac{((C-B)\,y)^{m-n-1}}{(m-n-1)!}\cdot\frac{(L-(A+B)\,y)^{n-1}}{(n-1)!}$$

en dus, op grond van de boven opgemaakte formule (1),

$$=(C-B)^{m-n-1}\,.\,(A+B)^{n-1}\,.\,\frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{L}{A+B}\right)^{m-1}\ \text{is;}$$

zoodat die herleidingsformule wordt

$$\int_0^{\frac{L}{A+B}} dy \int_{By}^{L-Ay} \frac{(Cy-z)^{m-n-1}}{(m-n-1)!}\,\frac{(L-Ay-z)^{n-2}}{(n-2)!}\,dz=$$

$$=\frac{1}{A+B}\cdot\left(\frac{C-B}{A+B}\right)^{m-n-1}\frac{L^{m-1}}{(m-1)!}-$$

$$-\int_0^{\frac{L}{A+B}} dy \int_{By}^{L-Ay} \frac{(Cy-z)^{m-n-2}}{(m-n-2)!}\,\frac{(L-Ay-z)^{n-1}}{(n-1)!}\,dz.$$

Telt men namelijk thans bij deze voor willekeurige n geldige formule al hare opvolgende toepassingen voor $n+1$, $n+2$, ..., $m-2$, behoudens beurtelingsche omkeering van teeken, op, en bovendien de in plaats van hare toepassing voor $m-1$ tredende formule

$$(-)^{m-n-1}\int_0^{\frac{L}{A+B}} dy \int_{By}^{L-Ay} \frac{(L-Ay-z)^{m-3}}{(m-3)!}\,dz=$$

$$=(-)^{m-n-1}\int_0^{\frac{L}{A+B}} dy\,\frac{(L-(A+B)\,y)^{m-2}}{(m-2)!}=$$

$$=(-)^{m-n-1}\,\frac{1}{A+B}\cdot\frac{L^{m-1}}{(m-1)!},$$

dan komt voor de bedoelde tweede dubbel-integraal

$$\int_0^{\frac{L}{A+B}} dy \int_{By}^{L-Ay} \frac{(Cy-z)^{m-n-1}}{(m-n-1)!}\,\frac{(L-Ay-z)^{n-2}}{(n-2)!}\,dz=$$

$$=\frac{1}{A+B}\cdot\frac{L^{m-1}}{(m-1)!}\left\{\left(\frac{C-B}{A+B}\right)^{m-n-1}-\left(\frac{C-B}{A+B}\right)^{m-n-2}+\text{enz.}+\right.$$

$$\left.+(-1)^{m-n-1}\right\}=\frac{1}{A+C}\cdot\frac{L^{m-1}}{(m-1)!}\left\{\left(\frac{C-B}{A+B}\right)^{m-n}+(-1)^{m-n-1}\right\}.$$

En door, zooals gezegd, van deze waarde nu af te trekken die, waartoe zij zich in het bijzondere geval $B=C$ vereenvoudigt, dat is haar tweeden term zelf, en daarna voor L, A, B en C hunne waarden weder in te vullen, is alzoo voor de volledige integraaluitdrukking, die in $K_{m.n.p}$ voorkomt, verkregen $\frac{(n-k)(i+1)}{n+ik}\cdot\frac{1}{(m-1)!}\cdot\frac{l^{m-1}}{(n-k)^{m-1}}\cdot$ $\cdot\left\{\frac{(n-k)(m-n-i)}{(i+1)(n+(m-n)k)}\right\}^{m-n}$; en gaat bijgevolg de kans $K_{m.n.p}$ zelf over in

$$K_{m.n.p}=\binom{m}{n-1}(m-n+1)\binom{n-1}{p}\sum_{n-p}^{n}{}_k\left\{\frac{(-)^{-n+p+k}\binom{p}{n-k}}{(n+(m-n)k)^{m-n}}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{0}^{m-n}{}_i(-)^i\binom{m-n}{i}\frac{(m-n-i)^{m-n}}{n+ik}\right\}.$$

Nadat op deze wijze de beide aanvankelijk in $K_{m.n.p}$ voorkomende integraalteekens verdreven zijn, kan men nu met de vereenvoudiging nog een stap verder gaan door namelijk ook de eindige sommatie, waarop de aanwijzer i betrekking heeft, werkelijk uit te voeren. In verband met eene zoo straks nog uit te voeren nagenoeg gelijksoortige sommatie, zullen wij daartoe echter eene eenigszins algemeener formule opstellen, die zoowel het eene als het andere geval omvat. Wij bedoelen de formule

$$\sum_{0}^{q}{}_i(-)^i\binom{q}{i}\frac{(a+ib)^r}{n+ik}=\frac{q!\,k^{q-r}(ak-bn)^r}{n(n+k)(n+2k)\ldots(n+qk)},\ldots(2)$$

die geldig is voor alle geheele waarden van $r=0$ tot en met q, zooals op verschillende wijzen kan worden aangetoond. Bij voorbeeld vooreerst — al moge dit veeleer eene bevestiging achteraf dan wel eene rechtstreeksche sommatie zijn —

door op te merken, dat in het tweede lid de noemer opklimt tot de $(q+1)^e$ macht van n, de teller slechts tot de lagere r^{de} macht, en dat op dien grond de leerwijze der onbepaalde coëfficienten toepasselijk moet zijn op de bepaling der tellers van de gedeeltelijke breuken, in wier som dat tweede lid zich laat splitsen: stellende dan ook het eerste lid door $\sum_0^q i \dfrac{A_i}{n+i\,k}$ voor, heeft men ter berekening van den algemeenen teller A_i niet anders te doen dan in de identiteit $\sum_0^q i \{n(n+k)...(n+(i-1)k)\}\{(n+(i+1)k)(n+(i+2)k)...$ $...(n+q\,k)\}\,A_i = q!\,k^{q-r}\,(a\,k-b\,n)^r$, ter gelijktijdige verdrijving van alle overige tellers A, die ieder met den factor $n+i\,k$ zijn aangedaan, de veranderlijke $n=-i\,k$ te nemen, waardoor komt $\{(-)^i i!\,k^i\}\{(q-i)!\,k^{q-i}\}\,A_i = q!\,k^{q-r}.\,k^r(a+ib)^r$ of $A_i = (-)^i \binom{q}{i}(a+i\,b)^r$, zooals werkelijk in (2) is neêrgesteld. En tot hetzelfde besluit zou men natuurlijk ook komen door, na in het tweede lid van (2) den van k onafhankelijken term $\dfrac{q!\,k^{q-r}(a\,k)^r}{n\,.\,q!\,k^q} = \dfrac{a^r}{n}$ (naar behooren gelijk aan den term voor $i=0$ in het eerste lid), dien men bij deeling van teller door noemer verkrijgt, te hebben afgezonderd ten einde den teller te herleiden tot lager macht van k dan in den noemer voorkomt, alsnu in denzelfden geest de als veranderlijke beschouwde $k = -\dfrac{n}{i}$ te stellen.

Men kan echter ook de in (2) voor willekeurige $r \leqq q$ aangewezen sommatie terugbrengen tot die voor het meer eenvoudige geval $r=0$. Op grond toch van de hoofdformule voor het q^{de} verschil der termen van eenige reeks, toegepast op de $(r-1)^e$ machten der termen van eene gewone rekenkundige reeks, voor welke machten dat verschil wegens $r-1<q$ gelijk nul moet wezen, heeft men steeds $\sum_0^q i(-)^i\binom{q}{i}$.

$.\{(a\,k - b\,n) + (n + i\,k)\,x\}^{r-1} = 0$. Vat men nu hierin x als eene veranderlijke op, dan moet dus de integraal van het eerste lid, dat is $\sum\limits_0^q i\,(-)^i \binom{q}{i} \frac{\{(a\,k - b\,n) + (n + i\,k)\,x\}^r}{n + i\,k}$, onafhankelijk van deze x zijn; en door dan de waarden van deze integraal voor $x = b$ en $x = 0$ aan elkander gelijk te stellen, heeft men $k^r \sum\limits_0^q i\,(-)^i \binom{q}{i} \frac{(a + i\,b)^r}{n + i\,k} = (a\,k - b\,n)^r$.

$.\sum\limits_0^q i\,(-)^i \binom{q}{i} \frac{1}{n + i\,k}$, waardoor de bedoelde terugbrenging bewerkstelligd is. Of ook, men kan deze als volgt bewerken. Wegens $k\,(a + i\,b) = (a\,k - b\,n) + b\,(n + i\,k)$ wordt, door hierin de r^{de} macht van het tweede lid volgens het binomium te ontwikkelen,

$$k^r \sum_0^q i(-)^i \binom{q}{i} \frac{(a+i\,b)^r}{n+i\,k} = \sum_0^q i \left\{ (-)^i \binom{q}{i} \sum_0^r s \binom{r}{s} (ak-bn)^{r-s} b^s (n+ik)^{s-1} \right\} =$$

$$= \sum_0^r s \left\{ \binom{r}{s} (a\,k - b\,n)^{r-s} b^s \sum_0^q i(-)^i \binom{q}{i} (n+i\,k)^{s-1} \right\};$$

maar nu is weder, krachtens het zoo even herinnerde omtrent de machten der termen van eene rekenkundige reeks, voor alle waarden $s = 1$ tot en met r, wegens $s - 1 \leqq r - 1 < q$, de binnenste, in i aangeduide, som gelijk nul; daarentegen alleen voor $s = 0$ niet gelijk nul; en ook hier blijkt dus, als zoo even, het tweede lid zich te herleiden tot den enkelen term

$$(a\,k - b\,n)^r \sum_0^q i\,(-)^i \binom{q}{i} \frac{1}{n + i\,k}.$$

Wat nu betreft deze laatste som, dat is de eerste term van de rij der q^{de} verschillen van de harmonische reeks $\frac{1}{n}, \frac{1}{n+k}, \frac{1}{n+2\,k}, \ldots, \frac{1}{n+q\,k}$: door feitelijke aftrek-

king vindt men den eersten term van de eerste verschillen gelijk $\frac{1!\,k^1}{n\,(n+k)}$, van de tweede verschillen gelijk $\frac{2!\,k^2}{n\,(n+k)\,(n+2\,k)}$, van de derde verschillen gelijk $\frac{3!\,k^3}{n\,(n+k)\,(n+2\,k)\,(n+3\,k)}$, enz.; en dat men op grond hiervan in het algemeen voor de q^{de} verschillen mag besluiten tot $\sum_0^q (-)^i \binom{q}{i} \frac{1}{n+i\,k} =$

$$= \frac{q!\,k^q}{n\,(n+k)\,(n+2\,k)\ldots(n+q\,k)},$$ wordt uitgewezen doordien de overgang van de q^{de} tot de $(q+1)^{\text{e}}$ verschillen tot stand zou komen volgens $\sum_0^{q+1} (-)^i \binom{q+1}{i} \frac{1}{n+i\,k} = \sum_0^q (-)^i \binom{q}{i}.$

$$.\frac{1}{n+i\,k} - \sum_0^q (-)^i \binom{q}{i} \frac{1}{n+(i+1)\,k} = \frac{q!\,k^q}{(n+k)\,(n+2\,k)\ldots(n+q\,k)}.$$

$$.\left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+(q+1)\,k}\right\} = \frac{(q+1)!\,k^{q+1}}{n\,(n+k)\,(n+2\,k)\ldots(n+(q+1)\,k)},$$

en alzoo tot de geheel overeenkomstige formule in $q+1$ in plaats van in q zou leiden. Of meer rechtstreeks nog — stellende den algemeenen term van de bedoelde harmonische reeks door $x_i = \frac{1}{n+i\,k}$ vóór en hare verschillen der opvolgende orden door het gebruikelijke teeken $\triangle$, voorzien van den overeenkomstigen aanwijzer, — heeft men

$$\triangle\, x_{q-1} = x_{q-1} - x_q = \left(\frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_{q-1}}\right) x_{q-1}\,.\,x_q = 1!\,k^1\,x_{q-1}\,.\,x_q,$$

dus $\triangle^2\, x_{q-2} = \triangle\, x_{q-2} - \triangle\, x_{q-1} = k\,x_{q-2}\,.\,x_{q-1} - k\,x_{q-1}\,.\,x_q =$

$$= k\left(\frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_{q-2}}\right) x_{q-2}\,.\,x_{q-1}\,.\,x_q = 2!\,k^2\,x_{q-2}\,.\,x_{q-1}\,.\,x_q,$$

dus $\triangle^3\, x_{q-3} = \triangle^2\, x_{q-3} - \triangle^2\, x_{q-2} = 2!\,k^2\left(\frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_{q-3}}\right).$

$.\,x_{q-3}\,.\,x_{q-2}\,.\,x_{q-1}\,.\,x_q = 3!\,k^3.\,x_{q-3}\,.\,x_{q-2}\,.\,x_{q-1}\,.\,x_q,$

en zoo voortgaande eindelijk

$$\triangle^q\, x_0 = q!\,k^q\,x_0\,x_1\,x_2\ldots.x_q = \frac{q!\,k^q}{n\,(n+k)\,(n+2\,k)\ldots(n+q\,k)},$$

als zoo even. Of ook, door toepassing van de leer der bepaalde integralen, wordt $\sum_{0}^{q} i\,(-)^i\binom{q}{i}\frac{1}{n+ik}=\left[\sum_{0}^{q} i\,(-)^i\binom{q}{i}\cdot\right.$

$$\left.\frac{x^{n+ik}}{n+ik}\right]_0^1=\int_0^1\sum_{0}^{q} i\,(-)^i\binom{q}{i}x^{n+ik-1}\,dx=\int_0^1 x^{n+qk-1}(x^{-k}-1)^q dx=$$

$$=\frac{1}{n+qk}\left[x^{n+qk}(x^{-k}-1)^q+qk\int x^{n+(q-1)k-1}(x^{-k}-1)^{q-1}dx\right]_0^1=$$

$$=\frac{qk}{n+qk}\sum_{0}^{q-1} i\,(-)^i\binom{q-1}{i}\frac{1}{n+ik},\ \text{dus wederom}=\frac{qk}{n+qk}\cdot\frac{(q-1)k}{n+(q-1)k}\cdot$$

$$\cdot\sum_{0}^{q-2} i\,(-)^i\binom{q-2}{i}\frac{1}{n+ik}=\text{enz., en eindelijk — omdat}$$

$\sum_{0}^{0} i\,(-)^i\binom{0}{i}\frac{1}{n+ik}=\frac{1}{n}$ of, wil men liever, omdat $\sum_{0}^{1} i\,(-)^i\binom{1}{i}\frac{1}{n+ik}=$

$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}=\frac{k}{n(n+k)}$ is — nogmaals $=\frac{q!\,k^q}{(n+qk)(n+(q-1)k)\dots n}$.

Na aldus, naar wij meenen, lang genoeg bij de algemeene formule (2) te hebben stilgestaan, nemen wij daarin, om tot ons eigenlijke onderwerp terug te keeren, q, a en r allen gelijk $m-n$ en b gelijk -1, waardoor zij geeft $\sum_{0}^{m-n} i\,(-)^i\binom{m-n}{i}\frac{(m-n-i)^{m-n}}{n+ik}=$

$=\frac{(m-n)!\,(n+(m-n)\,k)^{m-n}}{n\,(n+k)\,(n+2k)\dots(n+(m-n)\,k)}$, en zoodoende de voor de kans $K_{m.n.p}$ gevonden uitdrukking den vorm van eene enkele som, namelijk:

$$K_{m.n.p}=\frac{m!}{n!}\binom{n-1}{p}\sum_{n-p}^{n} k\,\frac{(-)^{-n+p+k}\binom{p}{n-k}}{(n+k)(n+2k)\dots(n+(m-n)k)},\ \dots\ (3)$$

doet aannemen. En al schijnt het nu in het algemeen niet wel mogelijk, om, door ook de hier in k aangewezen sommatie werkelijk uit te voeren, ten slotte de uitdrukking voor

$K_{m.n.p}$ tot één enkelen term terug te brengen: toch is men niet aan den thans gevonden vorm (3) gebonden, maar bestaat de mogelijkheid om, door daarop juist de formule (2) nogmaals — nu evenwel in omgekeerden zin, dat is ter splitsing van iederen term van het tweede lid van (3) in gedeeltelijke breuken — toe te passen, en door dan na omkeering van de volgorde der weder optredende twee sommatiën ééne dier sommatiën op nieuw volgens (2) te verrichten, de kans $K_{m.n.p}$ nog onder een anderen vorm als enkele som te verkrijgen. Een oogenblik zelfs zou men misschien kunnen meenen dat, door voor de bedoelde splitsing over sommige van de in (2) voorkomende grootheden naar believen te beschikken, eene dergelijke vervorming van de ééne in eene andere enkele som op verschillende wijzen zou kunnen geschieden. Maar wanneer men bedenkt, dat (2) zelf als voorwaarde van toepasselijkheid aanwijst, dat de algemeene term van het eerste lid de grootheid k niet anders dan in den noemer, en wel lineair, mag bevatten, dan ziet men in, dat de bedoelde splitsing alleen dán met goed gevolg zal plaats hebben, wanneer men ze tot stand brengt door toepassing van zoodanig bijzonder geval van (2), waarbij in het tweede lid aldaar deze k in het geheel niet in den teller voorkomt. Op grond van deze overweging is men aan de onderstelling $r = q$, $a = 0$ gebonden; en neemt men nu met het oog op het tweede lid van (3) — alwaar voor ons tegenwoordig doel de laatste factor, n, van den vooropstaanden noemer $n!$ binnen het Σ-teeken kan worden gedacht — meer in het bijzonder deze $r = q = m - n$, dan heeft men dus in dat tweede lid van (3) te substitueeren $\dfrac{(m-n)!\,(-n)^{m-n}}{n(n+k)(n+2k)\ldots(n+(m-n)k)} =$

$$= \sum_{0}^{m-n} {}_i (-)^i \binom{m-n}{i} \frac{i^{m-n}}{n+ik} = (m-n) \sum_{1}^{m-n} {}_i (-)^i \binom{m-n-1}{i-1} \frac{i^{m-n-1}}{n+ik}.$$

Daardoor, en door de gezegde verwisseling der dan weder optredende sommatiën in k en in i, komt $(m-n-1)!(-n)^{m-n} K_{m.n.p} =$

$$= \frac{m!}{(n-1)!} \binom{n-1}{p} \sum_{1}^{m-n} {}_i \left\{ (-)^i \binom{m-n-1}{i-1} i^{m-n-1} \sum_{n-p}^{n} {}_k \right. .$$

$$\left.\frac{(-)^{-n+p+k}\binom{p}{n-k}}{n+ik}\right\}$$; en vervangt men nu, ten einde hier de binnenste sommatie te bewerkstelligen, in de algemeene formule (2) ditmaal q door p, i door $n-k$, r door 0, n door $(i+1)n$, en k door $-i$, waardoor zij geeft

$$\sum_{0}^{p}{}_{n-k}(-)^{n-k}\binom{p}{n-k}\frac{1}{n+ik}=(-)^p\sum_{n-p}^{n}{}_k\frac{(-)^{-n+p+k}\binom{p}{n-k}}{n+ik}=$$

$$=\frac{p!\,(-i)^p}{((i+1)n)((i+1)n-i)((i+1)n-2i)\dots((i+1)n-pi)},$$

dan wordt ten slotte de gewijzigde vorm

$$K_{m.n.p}=\frac{m!}{(m-n-1)!\,(n-p-1)!\,n^{m-n}}\sum_{1}^{m-n}{}_i(-)^{m-n-i}\binom{m-n-1}{i-1}.$$

$$.\frac{i^{m-n+p-1}}{(n+(n-p)i)(n+(n-p+1)i)\dots(n+ni)}\,.\,.\quad(3')$$

verkregen.

Voor de werkelijke uitrekening der kans in een bepaald geval kan men dus naar omstandigheden met het meeste voordeel gebruik maken van de formule (3), bestaande uit $p+1$ termen ieder met $m-n$ factoren in den noemer, dan wel van de formule (3′), bestaande omgekeerd uit $m-n$ termen ieder met $p+1$ factoren in den noemer.

Zoo heeft men bij voorbeeld voor de kleinste waarde, die voor p in aanmerking komt, namelijk voor $p=0$, als kans, dat de som der $m-n+1$ kleinste segmenten van de lijn l kleiner zij dan ieder der $n-1$ overige segmenten, de dubbele formule $K^{m.n}{}_{.0}=\dfrac{\binom{m}{n-1}}{n^{m-n+1}}=$

$$=\frac{m-n}{n^{m-n}}\binom{m}{n}\sum_{0}^{m-n}{}_i(-)^{m-n-i}\binom{m-n-1}{i-1}\frac{i^{m-n-1}}{1+i},$$ waarvan

dus de eerste veel eenvoudiger is dan de tweede.

De grootste waarde daarentegen, die aan p kan worden toegekend, is $p=n-1$. In dat geval zal de som der $m-n+1$ kleinste segmenten van l integendeel grooter zijn dan ieder

der $n - 1$ overige segmenten, met andere woorden zal de in den aanhef van dit opstel vermelde mogelijkheid bestaan om uit iedere groep van $m - n + 2$ segmenten een gesloten $(m - n + 2)$-hoek zamen te stellen. De hierop betrekkelijke kans bedraagt alzoo

$$K_{m.n.n-1} = \frac{m!}{n!} \sum_{1}^{n} k \frac{(-)^{k-1} \binom{n-1}{k-1}}{(n+k)(n+2k)\dots(n+(m-n)k)} =$$

$$= \frac{m!}{(m-n-1)!\, n^{m-n}} \sum_{1}^{m-n} i\, (-)^{m-n-i} \binom{m-n-1}{i-1} .$$

$$. \frac{i^{m-2}}{(n+i)(n+2i)\dots(n+ni)} .$$

Meer in het bijzonder heeft men hieruit bij voorbeeld voor $n = 2$, dat is voor de kans, dat de gezamenlijke m segmenten een gesloten m-hoek kunnen vormen: $K_{m.2.1} = 1 - \frac{m}{2^{m-1}} =$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)}{2^{m-2}} \sum_{1}^{m-2} i\, (-)^{m-i} \binom{m-3}{i-1} \frac{i^{m-2}}{(2+i)(2+2i)},$$

waarvan de eerste of meest eenvoudige vorm zich dan ook van de in den aanhef aangehaalde formule volgens Halphen alleen onderscheidt door verwisseling van de notatiën m en n. Evenzoo komt voor $n = 3$, als kans, dat uit elke $m - 1$ segmenten een $(m-1)$-hoek te vormen is, $K_{m.3.2} = 1 - \frac{m!}{1.3.5\dots(2m-3)} +$

$$+ \frac{m(m-1)}{2.3^{m-2}} = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{3^{m-3}} \sum_{1}^{m-3} i\, (-)^{m-i-1} .$$

$$. \binom{m-4}{i-1} \frac{i^{m-2}}{(3+i)(3+2i)(3+3i)} .$$ En zoo kan men voortgaan, totdat men als twee laatste gevallen van dezen aard vindt: voor $n = m - 2$, dat is voor een uit elke vier segmenten te vormen vierhoek,

$$K_{m.m-2.m-3} = m(m-1) \sum_{1}^{m-2} k \frac{(-)^{k-1} \binom{m-3}{k-1}}{(m-2+k)(m-2+2k)} =$$

$$= \frac{m!}{(m-2)^2}\left\{-\frac{1}{(m-1)\,m\,(m+1)\ldots(2m-4)}+\right.$$
$$\left.+\frac{2^{m-2}}{m\,(m+2)\,(m+4)\ldots(3m-6)}\right\};$$ en voor $n = m-1$, dat is voor een driehoek uit elke drie segmenten,

$$K_{m.m-1.m-2} = m\sum_{1}^{m-1}{}_{k}\frac{(-)^{k-1}\binom{m-2}{k-1}}{m-1+k} = \frac{1}{\binom{2m-2}{m-2}}.$$

Vooral in dit laatstgenoemde geval is dus de getallenberekening volgens (3′) gemakkelijker dan volgens (3). Dit heeft trouwens, ook voor willekeurige waarde van p, plaats zoodra $n = m-1$ is, dat is, indien gevraagd wordt naar de kans, dat de som der twee kleinste van de m segmenten der lijn l grooter zij dan p van de $m-2$ overige segmenten, en tevens kleiner dan de alsdan nog overblijvende $m-p-2$. Voor deze kans namelijk heeft men

$$K_{m.m-1.p} = m\binom{m-2}{p}\sum_{m-p-1}^{m-1}{}_{k}\frac{(-)^{-m+p+k+1}\binom{p}{m-k-1}}{m+k-1} =$$
$$= \frac{m!}{(m-p-2)!(m-1)}\cdot\frac{1}{(2m-p-2)\,(2m-p-1)\ldots(2m-2)};$$

uit welke formule onder anderen nog de eenvoudige betrekkingen $K_{m.m-1.p} = \frac{2m-p-3}{m-p-2}K_{m.m-1.p+1}$ en $K_{m.m-1.m-2} =$ $= K_{m-1.m-2.m-3}\,.\,K_{m.m-1.1}$, enz. volgen.

Ziehier overigens eene tabel der volgens (3) of (3′) uitgerekende waarden van de kans $K_{m.n.p}$ voor eenige der eenvoudigste waarden van m, n en p.

	$n=1$	$n=2$		$n=3$			$n=4$			
	$m-n+1=m$	$m-n+1=m-1$		$m-n+1=m-2$			$m-n+1=m-3$			
	$p=0$	$p=0$	$p=1$	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$
$m=1$	1									
$m=2$	1	1	0							
$m=3$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0				
$m=4$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	1	0	0	0
$m=5$	1	$\frac{5}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{76}{189}$	$\frac{43}{189}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{1}{56}$
$m=6$	1	$\frac{3}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{74}{189}$	$\frac{80}{189}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{39}{112}$	$\frac{27}{112}$	$\frac{11}{112}$
$m=7$	1	$\frac{7}{64}$	$\frac{57}{64}$	$\frac{7}{81}$	$\frac{278}{891}$	$\frac{536}{891}$	$\frac{35}{256}$	$\frac{939}{3328}$	$\frac{1125}{3328}$	$\frac{809}{3328}$

	$n=5$					$n=6$					
	$m-n+1=m-4$					$m-n+1=m-5$					
	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$
$m=1$											
$m=2$											
$m=3$											
$m=4$											
$m=5$	1	0	0	0	0						
$m=6$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{210}$	1	0	0	0	0	0
$m=7$	$\frac{7}{25}$	$\frac{308}{975}$	$\frac{1687}{7150}$	$\frac{1363}{10725}$	$\frac{881}{21450}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{35}{132}$	$\frac{7}{66}$	$\frac{7}{198}$	$\frac{7}{792}$	$\frac{1}{792}$

Hierin is telkens, zooals behoort, voor eene bepaalde waarde van m en van n de som der bij de verschillende waarden van p behoorende kansen gelijk de eenheid. Dat werkelijk steeds $\sum_{0}^{n-1} p\, K_{m.n.p} = 1$ zal zijn, wordt dan ook — en naar het schijnt gemakkelijker door den vorm (3) dan door (3′) —

bevestigd, indien men in (3) leest $\binom{n-1}{p}\binom{p}{n-k} =$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-p-1)!\,(n-k)!\,(-n+p+k)!} = \binom{n-1}{k-1}\binom{k-1}{-n+p+k},$$

waardoor men, de volgorde der alsnu te verrichten sommatiën in k en in p omkeerende, den binomiaal-coëfficient $\binom{n-1}{k-1}$ vóór het teeken $\sum_p$ kan brengen en dus heeft $\sum_0^{n-1}{}_p K_{m.n.p} =$

$$= \frac{m!}{n!} \sum_1^n{}_k \left\{ \frac{\binom{n-1}{k-1}}{(n+k)(n+2k)\ldots(n+(m-n)k)} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{n-k}^{n-1}{}_p (-)^{-n+p+k} \binom{k-1}{-n+p+k} \right\},$$ omdat namelijk vooreerst de kleinste waarde der ondergrens $n-p$ van k in (3) voor de verschillende $p=0$ tot en met $n-1$ bedraagt 1, en omdat ten andere bij de naar p te verrichten sommatie de ondergrens 0 van p zelf mocht vervangen worden door $n-k$, wijl voor iedere $p < n-k$ de binomiaal-coëfficient $\binom{k-1}{-n+p+k}$ toch op zich zelf gelijk nul zou zijn. Maar nu is steeds

$$\sum_{n-k}^{n-1}{}_p (-)^{-n+p+k} \binom{k-1}{-n+p+k} = (1-1)^{k-1} = 0,$$ behalve alleen voor $k=1$, als wanneer in deze som alleen $p=n-1$ geldt, en zij zich dus bepaalt tot den enkelen term $\binom{0}{0} = 1$. Van daar alzoo de uitkomst

$$\sum_0^{n-1}{}_p K_{m.n.p} = \frac{m!}{n!} \frac{\binom{n-1}{0}}{(n+1)(n+2)\ldots(n+(m-n))} = 1.$$

[Dat in Nieuw Archief voor Wiskunde, Deel IX, Stuk 2, 1882, blz. 190, in het Verslag der wetenschappelijke wintervergadering van 1 December 1880 — zie ook in Dl. XI,

1884, blz. 48, het Verslag der vergadering van 20 Februari 1884 — voor de kans dat, bij breking in vier stukken, uit elke drie willekeurig genomen stukken een driehoek kan worden gevormd (dus voor $m = 4$, $n = 3$, $p = 2$) wordt opgegeven $\frac{4}{27}$ in plaats van $\frac{1}{15}$, schijnt eene vergissing te zijn.]

Nadat in het vorenstaande de door $K_{m.n.p}$ aangeduide kans, dat de som der $m - n + 1$ kleinste van de m segmenten der lijn l grooter zij dan p van de overigen en kleiner dan de alsdan nog overblijvende $n - p - 1$ segmenten, berekend is door integratie ten opzichte van slechts twee veranderlijken, willen wij thans nog aantoonen hoe dezelfde formule ook gevonden kan worden — al is deze nieuwe weg nu juist niet korter — door te integreeren, zij het niet ten opzichte van alle m segmenten als veranderlijken, dan toch ten opzichte weder van de som y der $m - n + 1$ kleinsten en voorts ten opzichte van $n - 2$ der overige $n - 1$ segmenten. Bij deze wijze van berekenen schijnt het echter voordeel te geven, zich alle m segmenten in opklimmende orde van grootte gerangschikt te denken; weshalve wij daaromtrent de volgende algemeene opmerking op den voorgrond stellen. Iedere verdeeling van de lijn l in m segmenten, die elk eene bepaalde grootte hebben, geeft door deze segmenten op alle mogelijke wijzen te verschikken een gezamenlijk aantal van $m!$ verdeelingen, allen in segmenten van deze grootte. Daaronder zal steeds ééne verdeeling voorkomen, waarbij die segmenten in opklimmende orde gerangschikt zijn, en deze kan meer in het bijzonder als hoofdverdeeling of als type van de bedoelde $m!$ verdeelingen beschouwd worden. Daar dit geldt voor elk dergelijk stelsel van m segmenten van bepaalde grootte, zal ook in het algemeen het aantal verdeelingen, waarbij de m segmenten aan zekere voorwaarden betrekkelijk hunne grootte voldoen, maar waarbij niet op hunne rangorde gelet wordt, $m!$ maal zoo groot zijn als het overeenkomstige aantal, waarbij deze segmenten in opklim-

mende orde geplaatst zijn. Wel is waar geeft, wanneer eenige van de beschouwde m segmenten of zelfs allen onderling gelijk zijn, hunne verschikking niet $m!$ verschillende verdeelingen, maar slechts een geringer aantal of zelfs slechts éóne zelfde verdeeling, zoodat in dat geval de verhouding tusschen de aantallen verdeelingen zonder en met rangorde van grootte kleiner dan $m!$ is; maar dit neemt niet weg dat — uithoofde in het algemeen bij verdeeling in segmenten van willekeurige grootte het aantal verdeelingen in onderling ongelijke segmenten steeds oneindig maal grooter is dan dat, waarbij eenigen of allen gelijk zijn — het bedoelde uitzonderingsgeval toch buiten invloed blijft op de even vermelde uitkomst in haar geheel genomen.

Daar in den aanvang van het voorgaande opstel het geheele aantal verdeelingen van de lijn l in m segmenten, wanneer deze aan geene voorwaarde hoegenaamd gebonden zijn, evenredig bleek aan $\frac{l^{m-1}}{(m-1)!}$, is men dus thans gerechtigd door toepassing van voornoemde uitkomst het geheele aantal verdeelingen, waarbij de overigens willekeurige segmenten in opklimmende orde van grootte aaneensluiten, in denzelfden zin evenredig te stellen aan $\frac{l^{m-1}}{(m-1)!\,m!}$. En gaat men dan volgens denzelfden maatstaf over tot het berekenen van het aantal der verdeelingen, waarbij de m segmenten, weder in opklimmende orde geplaatst, bovendien voldoen aan de boven omschreven voorwaarde van grootte, dan zal het quotient van dit aantal door $\frac{l^{m-1}}{(m-1)!\,m!}$ weder de gevraagde kans $K_{m.n.p}$ moeten opleveren.

Het bedoelde aantal kan nu bij voorbeeld als volgt bepaald worden. Laat y als vroeger de som der $m-n+1$ kleinste van de m segmenten voorstellen, en noemen wij de $n-1$ overige segmenten in opklimmende orde $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-1}$. Voerende dan nog in het algemeen de notatie $S_k = x_1 + x_2 + + \ldots + x_k$ in, zoodat steeds $S_{n-1} + y = l$ is, dan kan men, terwijl telkens bij voorbeeld $x_{n-1} = l - S_{n-2} - y$ door de waarden van x_1 tot en met x_{n-2} en van y bepaald

wordt, deze laatsten als $n - 1$ onafhankelijk veranderlijken beschouwen, waarvoor opvolgend de ondergrenzen, gelet ook op de voor de som y verlangde voorwaarde, aangewezen worden door $0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_p < y < x_{p+1} < x_{p+2} < \ldots < < x_{n-2} < x_{n-1}$, en de bovengrenzen door in de hieruit onmiddellijk voortvloeiende ongelijkheden $n\, x_1 < S_1 + (n-1)\, x_2 < S_2 + + (n-2)\, x_3 < \ldots < S_{p-1} + (n-p+1)\, x_p < S_p + (n-p)\, y < < S_p + y + (n-p-1)\, x_{p+1} < S_{p+1} + y + (n-p-2)\, x_{p+2} < < \ldots < S_{n-3} + y + 2\, x_{n-2} < S_{n-2} + y + x_{n-1} = l$ opvolgend ieder lid in verband te beschouwen met het allerlaatste lid l. Men zou dus het gezochte aantal verdeelingen hebben voor te stellen door de $(n-1)$-voudige integraal van het product $d\,x_1 \,.\, dx_2 \ldots\ldots d\,x_p \,.\, d\,y \,.\, d\,x_{p+1} \,.\, d\,x_{p+2} \ldots\ldots d\,x_{n-2}$, daarbij ieder dezer $n - 1$ veranderlijken tusschen de vorenstaande grenzen nemende, ware het niet dat ook nog in rekening moet worden gebracht, dat de veranderlijke y bestaat uit de som van $m - n + 1$ segmenten, die ieder kleiner dan de kleinste x_1 der overige veranderlijken moeten zijn, en die bovendien zooals gezegd in opklimmende orde gerangschikt gedacht moeten worden. Om deze omstandigheid in rekening te brengen ontleenen wij aan de eerste toepassing in ons voorgaand opstel — door in de aldaar voor $K_{p.r}$ opgemaakte formule te vervangen l door y, m en p door $m - n + 1$, a door x_1, r door 0, en bovendien den veranderlijken aanwijzer k, ter onderscheiding van deze later in te voeren notatie, door i, en door tegelijkertijd de oorspronkelijke bovengrens $k = p$ te herstellen in plaats van de later ingevoerde $k < \frac{l}{a} - r$, — voor de kans, dat y verdeeld is in $m - n + 1$ segmenten allen $< x_1$, de uitdrukking $\sum_0^{m-n+1} i\, (-)^i \binom{m-n+1}{i} \,.\, \left(\frac{y - i\, x_1}{y}\right)^{m-n}$; welke uitdrukking, vermenigvuldigd met het geheele aantal $\frac{y^{m-n}}{(m-n)!\,(m-n+1)!}$ der verdeelingen van y in $m - n + 1$ opklimmende segmenten, ons als aantal verdeelingen van y in $m - n + 1$ opklimmende segmenten van

de thans bedoelde soort doet kennen $\frac{1}{(m-n)!\,(m-n+1)!}$.
$.\sum_{0}^{m-n+1} i\,(-)^i \binom{m-n+1}{i} (y - i\,x_1)^{m-n}$. En met dit aantal moet alzoo in het vorenstaande gedurig differentiaalproduct de factor $d\,y$ alsnog vermenigvuldigd worden, waarna de voornoemde $(n-1)$-voudige integraal van het aldus gewijzigde product volgens de voorafgegane redeneering door $\frac{l^{m-1}}{(m-1)!\,m!}$ behoort gedeeld te worden ten einde de gevraagde kans $K_{m.n.p}$ te voorschijn te doen komen. Bij vermenigvuldiging zoowel met dezen deeler als met den even verkregen standvastigen noemer $(m-n)!\,(m-n+1)!$, en bij inachtneming van de reeds beschouwde grenzen, is op deze wijze de formule

$$\frac{(m-n)!\,(m-n+1)!}{(m-1)!\,m!}\, l^{m-1}\, K_{m.n.p} = \int_0^{\frac{l}{n}} d\,x_1 \int_{x_1}^{\frac{l-S_1}{n-1}} d\,x_2\,.$$

$$.\int_{x_2}^{\frac{l-S_2}{n-2}} d\,x_3 \,.\,.\,.\,.\,.\int_{x_{p-1}}^{\frac{l-S_{p-1}}{n-p+1}} d\,x_p \int_{x_p}^{\frac{l-S_p}{n-p}} d\,y\,.$$

$$.\sum_{0}^{m-n+1} i\,(-)^i \binom{m-n+1}{i} (y - i\,x_1)^{m-n} \int_y^{\frac{l-S_p-y}{n-p-1}} d\,x_{p+1}\,.$$

$$.\int_{x_{p+1}}^{\frac{l-S_{p+1}-y}{n-p-2}} d\,x_{p+2} \,.\,.\,.\,.\int_{x_{n-4}}^{\frac{l-S_{n-4}-y}{3}} d\,x_{n-3} \int_{x_{n-3}}^{\frac{l-S_{n-3}-y}{2}} d\,x_{n-2}$$

gevonden, wier tweede lid echter dadelijk tot eene slechts $(p+1)$-voudige integraal kan worden herleid, daar de werkelijke uitrekening van de integralen in x_{n-2} achterwaarts tot en met x_{p+1} niet de minste moeielijkheid oplevert. Voor de allerlaatste integraal toch komt $\frac{l - S_{n-4} - y - 3\,x_{n-3}}{1!\;2!}$, dus voor de voorlaatste $\frac{(l - S_{n-5} - y - 4\,x_{n-4})^2}{2!\;3!}$, voor de

weder voorgaande $\dfrac{(l - S_{n-6} - y - 5\,x_{n-5})^3}{3!\;4!}$, enz., zoodat

eindelijk de integraal in x_{p+1} wordt $\displaystyle\int_y^{\frac{l-S_p-y}{n-p-1}} d\,x_{p+1}$.

$$\cdot\frac{(l-S_p-y-(n-p-1)\,x_{p+1})^{n-p-3}}{(n-p-3)!\,(n-p-2)!} = \frac{(l-S_p-(n-p)\,y)^{n-p-2}}{(n-p-2)!\,(n-p-1)!}:$$

eene uitkomst trouwens, die — daar zij het aantal verdeelingen van het gedeelte $x_{p+1} + x_{p+2} + \ldots + x_{n-1} = l - S_p - y$ der geheele lijn l in $n - p - 1$ opklimmende segmenten allen $> y$ moet voorstellen — ook wel weder onmiddellijk uit de zoo even herinnerde formule van ons voorgaand opstel of uit de nog eenvoudiger formule $K_{0.r+k} = \left(\dfrac{l-(r+k)\,a}{l}\right)^{m-1}$ aldaar had kunnen worden afgeschreven, indien men daarin thans vervangt l door $l-S_p-y$, m en $r+k$ door $n-p-1$, a door y; waarna de aldus komende kans $\left(\dfrac{l-S_p-(n-p)y}{l-S_p-y}\right)^{n-p-2}$ slechts met het geheele aantal $\dfrac{(l - S_p - y)^{n-p-2}}{(n-p-2)!\,(n-p-1)!}$ der verdeelingen van $l - S_p - y$ in $n - p - 1$ willekeurige opklimmende segmenten behoort vermenigvuldigd te worden. Door dit een en ander zijn wij dus thans zoover dat wij, het Σ-teeken vóór de integraalteekens brengende, kunnen schrijven:

$$\frac{(m-n)!\,(m-n+1)!\,(n-p-2)!\,(n-p-1)!}{(m-1)!\,m!}\,l^{m-1}K_{m.n.p} =$$

$$=\sum_0^{m-n+1}{}_i(-)^i\binom{m-n+1}{i}\int_0^{\frac{l}{n}} d\,x_1 \int_{x_1}^{\frac{l-S_1}{n-1}} d\,x_2 \int_{x_2}^{\frac{l-S_2}{n-2}} d\,x_3 \ldots$$

$$\cdot\int_{x_{p-2}}^{\frac{l-S_{p-2}}{n-p+2}} d\,x_{p-1} \int_{x_{p-1}}^{\frac{l-S_{p-1}}{n-p+1}} d\,x_p \int_{x_p}^{\frac{l-S_p}{n-p}} d\,y\,(y - i\,x_1)^{m-n}\,.$$

$$.\,(l-S_p-(n-p)\,y)^{n-p-2};$$

maar bij het verder uitwerken van de hier aangewezen $(p+1)$-voudige integraal ontmoet men nu grooter bezwaren, niet alleen omdat de achteraanstaande functie in wezenlijkheid alle

veranderlijken x_1 tot en met x_p en y bevat, maar hoofdzakelijk omdat die veranderlijken, behalve aan de aangegeven onder- en bovengrenzen, bovendien gebonden zijn aan de voorwaarde, dat de factor $y - i\,x_1$ (blijkens de afleiding der formule waaruit hij is overgenomen) slechts positieve waarden mag hebben. Misschien kan het dienstig zijn thans op twee verschillende wijzen — vooreerst door invoering van nieuwe veranderlijken, ten andere door wijziging in de volgorde der te verrichten integratiën — te doen zien hoe, met inachtneming der evengenoemde voorwaarde, de waarde van voorenstaande bepaalde integraal en dan ook die van de kans $K_{m.n.p}$ zelve kan worden gevonden.

Bij toepassing van de leerwijze der nieuwe veranderlijken maken wij gebruik van de algemeene stelling, die bij voorbeeld bij Dr. R. Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, 3e Aufl., 1870, blz. 133—137, Nos. 8 en 9, in de volgende termen is uitgesproken: Indien de functie $F(y_1, \ldots, y_n)$, na invoering der veranderlijken $x_1, \ldots, x_n$, waarvan $y_1, \ldots, y_n$ op gegeven wijze afhangen, door $G(x_1, \ldots, x_n)$ wordt uitgedrukt, dan wordt de tusschen bepaalde eindige grenzen genomen n-voudige integraal $J = \int F(y_1, .., y_n)\, dy_1 \ldots dy_n$ uitgedrukt door $\int G(x_1, \ldots, x_n)\, \Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_n} d x_1 \ldots d x_n$; in de onderstelling namelijk, dat met ieder stelsel waarden der y slechts één stelsel waarden der x overeenstemt; dat de overeenkomstige differentialen gelijke teekens bekomen; dat de integratiegrenzen voor de x in overeenstemming met de gegeven integratiegrenzen voor de y bepaald worden. Van deze stelling, waarin de ook onder de vormen $\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$

en $\frac{\partial (y_1, \ldots, y_n)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)}$ beschouwde uitdrukking $\Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_n}$

niet anders is dan de zoogenaamde functionaaldeterminant van de y ten opzichte der x, worden daar ter plaatse twee bewijzen, het eerste naar het schijnt volgens JACOBI, het tweede volgens LAGRANGE en CATALAN, gegeven.

[Alvorens tot de toepassing van deze stelling op ons onderwerp over te gaan, wil ik opmerken, dat, naar mij voorkomt, zoowel de stelling van BALTZER, blz. 130—131, n°. 5, voor $m = n$, als ook die van blz. 141—142, n°. 15, die beiden aldaar zelfstandig bewezen worden, tevens als gevolgen van de voornoemde te beschouwen zijn. De eerste namelijk zegt, dat als $z_1, \ldots, z_n$ gegeven functiën van $y_1, \ldots, y_n$, en deze weder van $x_1, \ldots, x_n$ zijn, $\dfrac{\partial (z_1, \ldots, z_n)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)} = \dfrac{\partial (z_1, \ldots, z_n)}{\partial (y_1, \ldots, y_n)} \cdot \dfrac{\partial (y_1, \ldots, y_n)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)}$ is, hetgeen bij voorbeeld volgt uit de beschouwing der bepaalde integraal van eene zelfde willekeurige functie, die, naarmate zij in de z, de y of de x wordt uitgedrukt, gelijk $E(z_1, \ldots, z_n) = F(y_1, \ldots, y_n) = G(x_1, \ldots, x_n)$ is. En de tweede leert, dat het product van den functionaaldeterminant van onderling onafhankelijke functiën y ten opzichte der x en van den wederkeerigen functionaaldeterminant der x ten opzichte der y gelijk de eenheid is; zooals men ook vindt door van de in y uitgedrukte bepaalde integraal weder terug te keeren tot die in de oorspronkelijke x.]

Wanneer wij er op letten, dat in ons geval de $p+1$ veranderlijken x_1 tot en met x_p en y der bepaalde integraal in wezenlijkheid gebonden zijn aan de $p+2$ begrenzingen $0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots\ldots < x_p < y < \dfrac{l - S_p}{n - p}$ (want hieruit vloeien van zelf, als boven, alle verdere bovengrenzen voort) en bovendien aan de bijkomende of $(p+3)^e$ begrenzing $0 < y - i\,x_1$, en voorts dat de te integreeren functie bestaat uit factoren $y - i\,x_1$, die twee der veranderlijken, en $l - S_p - (n-p)\,y$, die zelfs alle veranderlijken bevatten, — dan blijkt dat wij het dubbele voordeel erlangen alle ondergrenzen tot nul te vereenvoudigen en tegelijkertijd de twee genoemde factoren tot slechts enkele veranderlijken te herleiden, indien wij de zoo even aangehaalde algemeene stelling toepassen in dier voege

dat de $p+1$ oorspronkelijke veranderlijken x_1 tot en met x_p en y afhangen van even zooveel in te voeren nieuwe veranderlijken z_1 tot en met z_p en y' volgens de formulen $x_1 = z_1$, $x_2 - x_1 = z_2$, $x_3 - x_2 = z_3$, ..., $x_{p-1} - x_{p-2} = z_{p-1}$, $l - S_p - (n-p)\,y = z_p$ en $y - i\,x_1 = y'$, waartoe dus voor de oude veranderlijken zelve, ieder uitgedrukt in de nieuwe, moet genomen worden (als men nog ter vereenvoudiging de algemeene notatie $i_r = i\,n - r\,(i-1)$ invoert) $x_1 = z_1$, $x_2 = z_1 + z_2$, $x_3 = z_1 + z_2 + z_3$, ..., $x_{p-1} = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_{p-1}$, $x_p = l - x_1 - x_2 - x_3 - \ldots - x_{p-1} - (n-p)\,y - z_p = l - (p-1)\,z_1 - (p-2)\,z_2 - (p-3)\,z_3 - \ldots - z_{p-1} - (n-p).(i\,z_1 + y') - z_p = l - (i_p - 1)\,z_1 - (p-2)\,z_2 - (p-3)\,z_3 - \ldots - 2\,z_{p-2} - z_{p-1} - z_p - (n-p)\,y'$ en $y = i\,z_1 + y'$. Hieruit volgt vooreerst, dat in den nieuwen integraalvorm de $p+1$ begrenzingen $0 < (z_1, z_2, z_3, \ldots, z_p, y')$ en bovendien, als gevolg van $0 < x_p - x_{p-1}$ en van $0 < y - x_p$, de $(p+2)^e$ en de $(p+3)^e$ begrenzing

$$0 < l - i_p\,z_1 - (p-1)\,z_2 - (p-2)\,z_3 - \ldots - 3\,z_{p-2} - \\ - 2\,z_{p-1} - z_p - (n-p)\,y'$$

en

$$0 < -l + i_{p-1}\,z_1 + (p-2)\,z_2 + (p-3)\,z_3 + \ldots + 2\,z_{p-2} + \\ + z_{p-1} + z_p + (n-p+1)\,y'$$

in acht genomen moeten worden; ten andere dat de functionaaldeterminant $\Sigma \pm \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n}$ der algemeene stelling — gelet op het aldaar gezegde omtrent de gelijke teekens der differentialen — in het tegenwoordige geval tot waarde verkrijgt

$$\left|\begin{array}{ccc:cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
i_p-1 & p-2 & p-3 & 2 & 1 & 1 & n-p \\
i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right|,$$

dat is — uithoofde hierin de voorlaatste rij mag verminderd worden met $(n-p)$-maal de laatste, waardoor haar laatste element overgaat in nul, terwijl haar voorlaatste element de eenheid blijft — het product der elementen van de hoofddiagonaal, namelijk de eenheid. De toepassing van meerge-

noemde algemeene stelling doet alzoo de voor de kans $K_{m.n.p}$ gevonden formule overgaan — indien wij voor de verschillende integratiën de volgorde nemen, die waarschijnlijk voor de uitrekening het geschiktst is — in:

$$\frac{(m-n)!\,(m-n+1)!\,(n-p-2)!\,(n-p-1)!}{(m-1)!\,m!}\,l^{m-1}K_{m.n.p}=$$

$$=\sum_{0}^{m-n+1}{}_i\,(-)^i\binom{m-n+1}{i}\int z_p^{\,n-p-2}\,d\,z_p\int y'^{\,m-n}\,d\,y'\,.$$

$$.\int^{p-1} d\,z_1\,d\,z_2\ldots.\,d\,z_{p-3}\,d\,z_{p-2}\,d\,z_{p-1},$$

mits hierin voor de $p+1$ veranderlijken alle mogelijke positieve waarden genomen worden, die binnen de zoo: even opgemaakte $(p+2)^e$ en $(p+3)^e$ begrenzing blijven.

Trachten wij nu in de eerste plaats de hier voorkomende $(p-1)$-voudige integraal te bepalen. Om de daarbij achtervolgens optredende begrenzingen gemakkelijker te kunnen overzien, voeren wij in het algemeen de notatie $(r-p+q)Z_{p-q.r-1}=$ $=l-i_{r-1}\,z_1-(r-2)\,z_2-(r-3)\,z_3-\ldots.-(r-p+q+1)$. $.\,z_{p-q-1}-z_p-(n-r+1)\,y'$ in, die eigenlijk, door eerst voor eene zelfde waarde van den veranderlijken aanwijzer q opvolgend te nemen $r=p+1$, p, enz., tot en met $p-q+1$ — als wanneer (daar dan ook de opvolgende coëfficienten $i_{r-1}=i\,n-(r-1)\,(i-1)$ eene rekenkundige reeks vormen) evenzeer de opvolgende $(q+1)Z_{p-q.p}$, $qZ_{p-q.p-1}$, $(q-1)Z_{p-q.p-2}$, $\ldots$, $2\,Z_{p-q.p-q+1}$, $Z_{p-q.p-q}$ en ook nog $Z_{p-q-1.p-q-1}-$ $-z_{p-q-1}$ de termen van zulk eene reeks blijken te zijn — en door daarna dezen q zelf in volgorde gelijk 1 tot en met $p-3$ te stellen, bij wijze van type de plaats van $p-3$ groepen, opvolgend van 2, 3, $\ldots$, $p-2$ zulke formulen, inneemt. De ingevoerde notatie leert bovendien, door daarin q te vervangen door $q+1$, dat steeds — en wel wederom voor $r=p+1$ tot en met $p-q+1$ en voor $q=1$ tot en met $p-3$, — de betrekking $(r-p+q)\,Z_{p-q.r-1}=$ $=(r-p+q+1)\,(Z_{p-q-1.r-1}-z_{p-q-1})$ geldt. Maar volledigheidshalve, ten einde bij de naar z_1, y' en z_p te verrichten integratiën over soortgelijke notatiën te beschikken

als bij die naar z_{p-1}, z_{p-2}, enz. tot en met z_2, dienen de evenbedoelde $p-3$ groepen nog door drie uitzonderingsgroepen voor $q=p-2$, $p-1$ en p te worden aangevuld, welke evenzoo kunnen worden voorgesteld door de drie typische formulen:

$(r-2)\,Z_{2.r-1}=l-i_{r-1}\,z_1-z_p-(n-r+1)\,y'=i_{r-1}\,.$
$.\,(Z_{1.r-1}-z_1)$, geldig voor $r=p+1, p$, enz. tot en met 3,
$i_{r-1}\,Z_{1.r-1}=l-z_p-(n-r+1)\,y'=(n-r+1)\,(Y'_{r-1}-y')$,
geldig voor $r=p+1$, p, enz. tot en met 2,

en

$(n-r+1)\;Y'_{r-1}=l-z_p$, geldig voor $r=p+1$, p, enz. tot en met 2.

Dit een en ander vooropgesteld zijnde, zouden wij, indien wij met geene andere veranderlijke te doen hadden dan alleen z_{p-1} — met deze toch willen wij de reeks der te verrichten integratiën aanvangen — kunnen volstaan, uithoofde de ingevoerde notatiën Z aan de boven opgemaakte $(p+2)^e$ en $(p+3)^e$ begrenzing den beknopten vorm $0<2\,(Z_{p-1.p}-z_{p-1})$ en $0<-Z_{p-1.p-1}+z_{p-1}$, dat is $Z_{p-1.p-1}<z_{p-1}<Z_{p-1.p}$, geven, met tusschen de grenzen $Z_{p-1.p-1}$ en $Z_{p-1.p}$ te integreeren. Niet alzoo echter, nu wij ook op de grenzen voor z_{p-2} enz. moeten letten. Want wél leert — wegens de rekenkundige reeks $2\,Z_{p-1.p}=3\,(Z_{p-2.p}-z_{p-2})$, $Z_{p-1.p-1}=$ $=2\,(Z_{p-2.p-1}-z_{p-2})$ en $Z_{p-2.p-2}-z_{p-2}$, — de voor z_{p-1} vereischte voorwaarde $Z_{p-1.p-1}<Z_{p-1.p}$ of $0<(2Z_{p-1.p})-$ $-2\,(Z_{p-1.p-1})=-(Z_{p-2.p-2}-z_{p-2})$ ons, dat voor z_{p-2} steeds de ondergrens $Z_{p-2.p-2}<z_{p-2}$ moet gelden, maar daarentegen nemen de almede vereischte voorwaarden $0<Z_{p-1.p}$ en $0<Z_{p-1.p-1}$ de twee verschillende vormen $z_{p-2}<Z_{p-2.p}$ en $z_{p-2}<Z_{p-2.p-1}$ voor de bovengrens van z_{p-2} aan. Hieruit nu vloeit de noodzakelijkheid voort om ook ten aanzien reeds van de integraal in z_{p-1} eene splitsing te maken, met name om — gelet steeds op de slechts positieve waarden, waarvan voor de veranderlijken sprake kan zijn — deze integraal op te vatten als de overmaat van die tusschen 0 en $Z_{p-1.p}$ boven die tusschen 0 en $Z_{p-1.p-1}$; want juist alleen op deze wijze komen de twee evengevonden bovengrenzen van z_{p-2} ieder afzonderlijk in één dezer beide nieuwe in-

tegralen tot haar recht. Men heeft dus de dubbel-integraal in $d\,z_{p-2}$ en $d\,z_{p-1}$ uit te werken onder den vorm

$$\int_{Z_{p-2.p-2}}^{Z_{p-2.p}} d z_{p-2} \int_0^{Z_{p-1.p}} d z_{p-1} - \int_{Z_{p-2.p-2}}^{Z_{p-2.p-1}} d z_{p-2} \int_0^{Z_{p-1.p-1}} d z_{p-1}.$$

Maar na het opgemerkte ten aanzien van z_{p-2} ligt het vermoeden voor de hand, dat ook voor z_{p-3} en voor alle verdere veranderlijken iets dergelijks in acht zal dienen genomen te worden: en werkelijk leert ook hier weder de beschouwing van de rekenkundige reeks $3\,Z_{p-2.p} = 4\,(Z_{p-3.p} - z_{p-3})$, $2\,Z_{p-2.p-1} = 3\,(Z_{p-3.p-1} - z_{p-3})$, $Z_{p-2.p-2} = 2\,(Z_{p-3.p-2} - - z_{p-3})$ en $Z_{p-3.p-3} - z_{p-3}$, dat beide integralen in z_{p-2} (uithoofde $0 < \frac{(3Z_{p-2.p}) - 3(Z_{p-2.p-2})}{2}$ zoowel als $0 < (2Z_{p-2.p-1}) - - 2\,(Z_{p-2.p-2})$ zamenvallen in $0 < -(Z_{p-3.p-3} - z_{p-3})$) voor z_{p-3} wel de gemeenschappelijke ondergrens $Z_{p-3.p-3} < < z_{p-3}$ opleveren, maar dat daarentegen, naarmate men met $0 < Z_{p-2.p}$ of $0 < Z_{p-2.p-1}$ of $0 < Z_{p-2.p-2}$ te doen heeft, voor z_{p-3} de verschillende bovengrenzen $z_{p-3} < Z_{p-3.p}$ of $z_{p-3} < Z_{p-3.p-1}$ of $z_{p-3} < Z_{p-3.p-2}$ in aanmerking komen. Van daar ook thans weder de noodzakelijkheid om ieder der beide integralen in z_{p-2}, evenals aanvankelijk voor de enkele integraal in z_{p-1} noodig bleek, te behandelen als het verschil van twee integralen met 0 tot gemeenschappelijke ondergrens; en het zal wel niet verwonderen, dat hetzelfde bij voortgezet onderzoek voor z_{p-3}, z_{p-4}, enz., z_1 eveneens noodig bevonden wordt. Zoodoende komt men, indien ter bekorting iedere $\int_0^{Z_{q.r}} d\,z_q$ door het enkele teeken $(q.r)$ voorgesteld wordt — met dien verstande dat, waar twee of meer zulke teekens naast elkander voorkomen, niet hun product, maar de overeenkomstige dubbele of veelvoudige bepaalde integraal bedoeld wordt — en indien voorts de integraal naar z_{p-1} alleen, die naar z_{p-1} en z_{p-2}, enz., en ten slotte de volledige $(p-1)$-voudige integraal naar z_{p-1} tot en met z_1, opvolgend worden aangeduid door P_1, P_2, enz. tot en met P_{p-1}, op het volgende stel formulen neder:

$$P_1 = (p-1.p) - (p-1.p-1),$$

$$P_2 = \{(p-2.p) - (p-2.p-2)\}\,(p-1.p) - \{(p-2.p-1) - \\ -(p-2.p-2)\}\,(p-1.p-1) = \\ = (p-2.p)(p-1.p) - (p-2.p-1)(p-1.p-1) - (p-2.p-2)P_1,$$

$$P_3 = \{(p-3.p) - (p-3.p-3)\}\,(p-2.p)\,(p-1.p) - \\ - \{(p-3.p-1) - (p-3.p-3)\}(p-2.p-1)(p-1.p-1) - \\ - \{(p-3.p-2) - (p-3.p-3)\}\,(p-2.p-2)\,P_1 = \\ = (p-3.p)\,(p-2.p)\,(p-1.p) - (p-3.p-1)\,(p-2.p-1)\,. \\ .\,(p-1.p-1) - (p-3.p-2)\,(p-2.p-2)\,P_1 - \\ - (p-3.p-3)\,P_2,$$

enz., en eindelijk

$$\int^{p-1} dz_1\, dz_2 \ldots dz_{p-2}\, dz_{p-1} = P_{p-1} = (1.p)\,(2.p)(\ldots)(p-1.p) - \\ - (1.p-1)\,(2.p-1)\,(\ldots)\,(p-1.p-1) - \\ - \sum_{2}^{p-1} r\,(1.p-r)\,(2.p-r)\,(\ldots)(p-r.p-r)\,P_{r-1}\,.$$

Na deze uiteenzetting omtrent de wijze hoe de veelvoudige integraal moet worden berekend, is thans hare werkelijke uitrekening aan de orde. Wat den eersten term betreft heeft men $(p-1.p) = \int_0^{Z_{p-1.p}} dz_{p-1} = \frac{2^0}{(1!)^2} Z_{p-1.p}$, dus $(p-2.p)$.

$$.\,(p-1.p) = \int_0^{Z_{p-2.p}} dz_{p-2}\, Z_{p-1.p} = \int_0^{Z_{p-2.p}} dz_{p-2}\,.$$

$$.\,\frac{3}{2}\,(Z_{p-2.p} - z_{p-2}) = \frac{3^1}{(2!)^2}\, Z^2_{p-2.p},$$ dus $(p-3.p)\;(p-2.p)\,.$

$$.\,(p-1.p) = \int_0^{Z_{p-3.p}} dz_{p-3}\,.\,\frac{3^1}{(2!)^2}\,.\,\left\{\frac{4}{3}\,(Z_{p-3.p} - z_{p-3})\right\}^2 =$$

$= \frac{4^2}{(3!)^2}\, Z^3_{p-3.p}$, enz.; en dat men hieruit besluiten mag tot

$$(p-q.p)\;(p-q+1.p)\,(\ldots)\;(p-1.p) = \frac{(q+1)^{q-1}}{(q!)^2}\, Z^q_{p-q.p}$$

blijkt, omdat uit deze formule weder volgt $(p-q-1.p)$.

$$.(p-q.p)(\ldots)(p-1.p)=\int_0^{Z_{p-q-1.p}} d\,z_{p-q-1}\,.\,\frac{(q+1)^{q-1}}{(q!)^2}\,.$$

$$.\left\{\frac{q+2}{q+1}(Z_{p-q-1.p}-z_{p-q-1})\right\}^q=\frac{(q+2)^q}{((q+1)!)^2}Z^{q+1}_{p-q-1.p},$$ dat is dezelfde behoudens vervanging van q door $q+1$. Hierbij valt echter op te merken dat — wijl volgens het bovengezegde $(r-2)\,Z_{2.r-1}=i_{r-1}(Z_{1.r-1}-z_1)$ niet meer in allen deele denzelfden vorm heeft als de voorafgaande overeenkomstige betrekkingen — de laatste toepassing van deze formule evenzeer den afwijkenden vorm $(1.p)(2.p)(\ldots)(p-1.p)=\int_0^{Z_{1.p}} dz_1\,.$

$$.\frac{(p-1)^{p-3}}{((p-2)!)^2}Z^{p-2}_{2.p}=\int_0^{Z_{1.p}} d\,z_1\,\frac{(p-1)^{p-3}}{((p-2)!)^2}\left\{\frac{i_p}{p-1}(Z_{1.p}-z_1)\right\}^{p-2}=$$

$$=\frac{i_p^{p-2}}{((p-1)!)^2}Z^{p-1}_{1.p}$$ aanneemt. Evenzoo vindt men, wat den tweeden term betreft, in het algemeen $(p-q.p-1)$.

$$.(p-q+1.p-1)(\ldots)(p-1.p-1)=\frac{q^{q-2}}{((q-1)!)^2}Z^q_{p-q.p-1},$$ maar ook hier weder, als laatste toepassing, voor dien term zelf den afwijkenden vorm $(1.p-1)(2.p-1)(\ldots)(p-1.p-1)=$

$$=\frac{i^{p-2}_{p-1}}{(p-2)!\,(p-1)!}Z^{p-1}_{1.p-1}.$$ Ten aanzien voorts van de opvolgende integralen P_1, P_2, enz. gelden de waarden $P_1=(p-1.p)-(p-1.\,.p-1)=Z_{p-1.p}-Z_{p-1.p-1}$, dat is (omdat volgens het boven opgemerkte $2\,Z_{p-1.p}$, $Z_{p-1.p-1}$, $Z_{p-2.p-2}-z_{p-2}$ eene rekenkundige reeks vormen) $P_1=-\dfrac{(Z_{p-2.p-2}-z_{p-2})^1}{1!\,2!}$; en $P_2=(p-2.p)$. $(p-1.p)-(p-2.p-1)(p-1.p-1)-(p-2.p-2)\,P_1=$

$$=\frac{3^1}{(2!)^2}Z^2_{p-2.p}-\frac{2^0}{(1!)^2}Z^2_{p-2.p-1}+\frac{1}{2}\int_0^{Z_{p-2.p-2}} d\,z_{p-2}\,.$$

$$.(Z_{p-2.p-2}-z_{p-2})=\frac{1}{2!3!}\left\{(3\,Z_{p-2.p})^2-3\,(2\,Z_{p-2.p-1})^2+\right.$$

$$\left.+\,3\,(Z_{p-2.p-2})^2\right\},$$ of (omdat $(3\,Z_{p-2.p})^2$, $(2\,Z_{p-2.p-1})^2$, $(Z_{p-2.p-2})^2$, $(Z_{p-3.p-3}-z_{p-3})^2$ eene rekenkundige reeks van

de tweede orde vormen, wier derde verschil dus gelijk nul is) $P_2 = \frac{(Z_{p-3.p-3} - z_{p-3})^2}{2!3!}$; evenzoo vindt men $P_3 = - \frac{(Z_{p-4.p-4} - z_{p-4})^3}{3!4!}$, enz.; en dat men nu in het algemeen besluiten mag tot $P_{r-1} = (-)^{r-1} \frac{(Z_{p-r.p-r} - z_{p-r})^{r-1}}{(r-1)!\, r!}$ wordt uitgewezen doordien men, aannemende dat deze formule en dus ook de daaruit voortvloeiende $(p-q.p-r)$.

$$.(p-q+1.p-r)(\ldots)(p-r.p-r)P_{r-1} = (-)^{r-1}\frac{1}{(r-1)!\, r!}.$$

$$.\int_0^{Z_{p-q.p-r}} dz_{p-q} \int_0^{Z_{p-q+1.p-r}} dz_{p-q+1} \ldots \int_0^{Z_{p-r.p-r}} dz_{p-r}.$$

$$.(Z_{p-r.p-r} - z_{p-r})^{r-1} = (-)^{r-1}\frac{1}{(r!)^2}\int_0^{Z_{p-q.p-r}} d\, z_{p-q} \ldots .$$

$$.\int_0^{Z_{p-r-1.p-r}} d\, z_{p-r-1} \left\{ \frac{2}{1}(Z_{p-r-1.p-r} - z_{p-r-1}) \right\}^r =$$

$$= (-)^{r-1}\frac{1}{r!\,(r+1)!}\left(\frac{2}{1}\right)^r \int_0^{Z_{p-q.p-r}} d\, z_{p-q} . \ldots .$$

$$.\int_0^{Z_{p-r-2.p-r}} d\, z_{p-r-2} \left\{ \frac{3}{2}(Z_{p-r-2.p-r} - z_{p-r-2}) \right\}^{r+1} = \ldots =$$

$$= (-)^{r-1}\frac{(q-r+1)^{q-1}}{r!\, q!\,(q-r)!} Z^q_{p-q.p-r} = \frac{(-)^{r-1}}{q!\,(q+1)!}\binom{q+1}{r}.$$

$.\{(q-r+1)\, Z_{p-q.p-r}\}^q$ reeds voor $r = 2$ tot en met q juist bevonden zou zijn, daaruit verder afleidt $P_q = (p-q.p)(\ldots)$.

$$.(p-1.p) - (p-q.p-1)(\ldots)(p-1.p-1) - \sum_2^q r(p-q.p-r).$$

$$.(\ldots)(p-r.p-r)P_{r-1} = \frac{(q+1)^{q-1}}{(q!)^2} Z^q_{p-q.p} - \frac{q^{q-2}}{((q-1)!)^2} Z^q_{p-q.p-1} +$$

$$+ \frac{1}{q!\,(q+1)!}\sum_2^q r(-)^r\binom{q+1}{r}\{(q-r+1)\, Z_{p-q.p-r}\}^q = \frac{1}{q!\,(q+1)!}.$$

$. \sum_{0}^{q} r(-)^r \binom{q+1}{r} \{(q-r+1) Z_{p-q.p-r}\}^q$, dat is (omdat volgens het vroeger opgemerkte de termen $((q+1) Z_{p-q.p})^q$, $(q Z_{p-q.p-1})^q$, ..., $(Z_{p-q.p-q})^q$ en $(Z_{p-q-1.p-q-1} - z_{p-q-1})^q$ eene rekenkundige reeks van de q^{de} orde vormen, wier $(q+1)^e$ verschil dus gelijk nul is) $P_q = (-)^q \dfrac{(Z_{p-q-1.p-q-1} - z_{p-q-1})^q}{q!\,(q+1)!}$, ten blijke dat alsdan ook dezelfde formule voor $r = q+1$ doorgaat. Ook hieruit echter mag men niet rechtstreeks als laatste toepassing de formule voor de $(p-1)$-voudige integraal P_{p-1} zelve afschrijven: integendeel, men moet, in denzelfden geest als zoo even reeds voor de beide eerste termen van P_{p-1}, thans ook bedacht zijn op den uitzonderingsvorm $(1.p-r)(2.p-r)(\ldots.)(p-r.p-r) P_{r-1} =$

$$= \int_0^{Z_{1.p-r}} dz_1 \frac{(-)^{r-1}}{(p-2)!\,(p-1)!} \binom{p-1}{r} \{(p-r-1) Z_{2.p-r}\}^{p-2} =$$

$$= \frac{(-)^{r-1}}{(p-2)!\,(p-1)!} \binom{p-1}{r} \int_0^{Z_{1.p-r}} dz_1 \{i_{p-r}(Z_{1.p-r} - z_1)\}^{p-2} =$$

$$= \frac{(-)^{r-1}}{((p-1)!)^2} \binom{p-1}{r} i_{p-r}^{p-2} Z_{1.p-r}^{p-1},$$ dien de algemeene term van P_{p-1} aanneemt, en komt dan, een en ander substitueerende, neder op $\int^{p-1} d z_1 . d z_2 . \ldots . d z_{p-2}\, d z_{p-1} = P_{p-1} = \dfrac{i_p^{p-2}}{((p-1)!)^2}.$

$$. Z_{1.p}^{p-1} - \frac{i_{p-1}^{p-2}}{(p-2)!\,(p-1)!} Z_{1.p-1}^{p-1} + \frac{1}{((p-1)!)^2} \sum_{2}^{p-1} r(-)^r \binom{p-1}{r}.$$

$$. i_{p-r}^{p-2} Z_{1.p-r}^{p-1} = \frac{1}{((p-1)!)^2} \sum_{0}^{p-1} r(-)^r \binom{p-1}{r} i_{p-r}^{p-2} Z_{1.p-r}^{p-1}.$$

Nadat op deze wijze de waarde der $(p-1)$-voudige integraal bekend geworden is, zou men tot de uitvoering der twee nog te verrichten integratiën, in y' en in z_p, kunnen overgaan, en daarbij, wat y' betreft — uithoofde bij de laatste

voor den algemeenen term van P_{p-1} verrichte integratie de bovengrens $z_1 < Z_{1.p-r}$ gold, die dus noodwendig medebrengt $0 < i_{p-r} Z_{1.p-r} = (n-p+r)(Y'_{p-r} - y')$, — telkens in den overeenkomstigen term de bovengrens $y' < Y'_{p-r}$ hebben te nemen; terwijl uit de hiertoe vereischte betrekking $0 < (n-p+r) Y'_{p-r} = l - z_p$ dan verder blijkt, dat daarentegen ten aanzien van z_p in alle termen de gemeenschappelijke bovengrens $z_p < l$ moet gelden, zooals zich trouwens voor deze laatste van alle veranderlijken wel verwachten liet.

Evenwel, vóór wij tot het bedoelde laatste onderdeel van de in behandeling zijnde rekenwijze overgaan, schijnt het dienstig op eene omstandigheid bedacht te zijn, die wij tot nog toe buiten beschouwing lieten. Wij redeneerden en rekenden namelijk tot dus verre, alsof voor alle waarden 0 tot en met $m-n+1$ van den veranderlijken aanwijzer i, waarop het vóór de integraalteekens voorkomende Σ-teeken in de formule voor $K_{m.n.p}$ betrekking heeft, in allen deele hetzelfde van toepassing zou zijn. Dit nu is niet het geval: voor de laagste waarde, $i=0$, doet zich eene uitzondering voor, die niet onvermeld mag blijven. Zij bestaat hierin, dat de voorwaarde $0 < y - i x_1$, die wij in het algemeen voor willekeurige i als eene zelfstandige $(p+3)^e$ begrenzing voor de oorspronkelijke veranderlijken opmerkten, juist alleen in het geval van $i=0$ zamenvalt met de buitendien reeds aangevoerde voorwaarde $0 < y$; zoodat voor $i=0$ het volledige aantal begrenzingen zich in wezenlijkheid van $p+3$ tot $p+2$ herleidt. Intusschen schijnt het niet noodig, uit dien hoofde voor dit uitzonderingsgeval $i=0$ de berekening nog eens afzonderlijk te hervatten: gemakkelijker bereikt men mijns inziens het doel door eene wijziging uitsluitend in de zoo even besproken op y' betrekkelijke grensbepaling. Bij den overgang namelijk van de oorspronkelijke tot de nieuwe veranderlijken is onder anderen het verband $l - S_p - (n-p) y = z_p$ opgesteld, waarin $S_p = x_1 + x_2 + \ldots + x_p < p y$ is, zoodat hieruit steeds volgt $l - z_p < p y + (n-p) y$ of $\frac{l - z_p}{n} < y = = i z_1 + y'$. In het algemeen sluit dit nu voor willekeurige i niet uit dat y', mits slechts niet negatief wordende, tot

nul kan afnemen; maar juist weder alleen voor $i = 0$ blijkt $Y' = \frac{l - z_p}{n} < y'$ als ondergrens de plaats van deze nul te moeten innemen. En terwijl alzoo voor $i = 1$ tot en met $m - n + 1$ de grenzen $0 < y' < Y'_{p-r}$ gelden, is men voor $i = 0$ gebonden aan $Y' < y' < Y'_{p-r}$; en het opnemen van het geval $i = 0$ onder de overigen — zooals tot nog toe ondersteld werd — is dan ook alleen geoorloofd, indien men bij wijze van verbetering de tusschen 0 en Y' te nemen integraal naar y', behoorende bij dit geval $i = 0$, in mindering brengt; waarbij overigens ook voor deze integraal, wegens $0 < Y'$, de bovengrens $z_p < l$ van z_p onveranderd blijft gelden.

Met inachtneming van het ten aanzien der grenzen van y' en van z_p bevondene neemt dan het tot nog toe als een enkele Σ-term voorgestelde tweede lid der formule voor $K_{m.n.p}$ meer bepaaldelijk den vorm $\sum_0^{m-n+1} i\, (-)^i \binom{m-n+1}{i}$.

$$. \int_0^l z_p^{n-p-2}\, d\, z_p \int_0^{Y'_{p-r}} y'^{m-n} d y'\, P_{p-1} - \int_0^l z_p^{n-p-2}\, d\, z_p \,.$$

$. \int_0^{Y'} y'^{m-n}\, d\, y'\, P_{p-1\,(\text{voor}\, i=0)}$ aan, waar nu in den eersten term de voor P_{p-1} verkregen waarde doorgaande kan worden aangehouden, al laat deze zich in het geval van $i = 0$ — door alsdan te letten op $i_{p-r} = i\,n - (p - r)\,(i - 1) = p - r$ zelf en op $\binom{p-1}{r} = \frac{p-r}{p} \binom{p}{r}$ — herleiden tot $P_{p-1(\text{voor}\, i=0)} =$

$$= \frac{1}{(p-1)!\,p!} \sum_0^{p-1} r\, (-)^r \binom{p}{r} \{(p-r)\, Z_{1.p-r}\}^{p-1} = (-)^{p-1}\,.$$

$. \frac{(l - z_p - n\, y')^{p-1}}{(p-1)!\, p!}$, omdat namelijk weder het p^e verschil van de rekenkundige reeks der $(p-1)^e$ orde $(p\, Z_{1.p})^{p-1}$, $((p-1)\, Z_{1.p-1})^{p-1}$, ..., $(Z_{1.1})^{p-1}$ en $(l - z_p - n\, y')^{p-1}$ gelijk nul is; maar in den tweeden term daarentegen schijnt deze

vereenvoudigde waarde verkieslijk. Alzoo komt bij het uitwerken van den eersten term — lettende weder op $i_{p-r} Z_{1.p-r} = (n-p+r)(Y'_{p-r} - y')$ en later op $(n-p+r)\, Y'_{p-r} = l - z_p$, en tot tweemaal toe de vroeger opgemaakte algemeene herleidingsformule (1) toepassende — vooreerst $\int_0^{Y'_{p-r}} y'^{m-n}$.

$$. \, d\,y'\, P_{p-1} = \frac{1}{((p-1)!)^2} \sum_0^{p-1} {}_r (-)^r \binom{p-1}{r} \frac{(n-p+r)^{p-1}}{i_{p-r}} .$$

$$. \int_0^{Y'_{p-r}} y'^{m-n} (Y'_{p-r} - y')^{p-1}\, d\,y' = \frac{(m-n)!}{(p-1)!\,(m-n+p)!} .$$

$$. \sum_0^{p-1} {}_r (-)^r \binom{p-1}{r} \frac{(n-p+r)^{p-1}}{i_{p-r}} \, Y'^{\,m-n+p}_{p-r}$$ en dus vervolgens

$$\int_0^l z_p^{\,n-p-2}\, d\,z_p \int_0^{Y'_{p-r}} y'^{m-n}\, d y'\, P_{p-1} = \frac{(m-n)!}{(p-1)!\,(m-n+p)!} .$$

$$. \sum_0^{p-1} {}_r (-)^r \binom{p-1}{r} \frac{1}{i_{p-r}(n-p+r)^{m-n+1}} \int_0^l z_p^{\,n-p-2} (l - z_p)^{m-n+p} dz_p =$$

$$= \frac{(m-n)!\,(n-p-2)!}{(p-1)!\,(m-1)!}\, l^{m-1} \sum_0^{p-1} {}_r (-)^r \binom{p-1}{r} \frac{1}{i_{p-r}(n-p+r)^{m-n+1}};$$

waardoor die eerste term zelf, indien men thans — ten einde neder te komen op dezelfde notatie als bij de vroeger reeds langs anderen weg opgemaakte formule (3) voor de kans $K_{m.n.p}$ — den veranderlijken aanwijzer r vervangt door $-n+p+k$, zoodat $\binom{p-1}{r} = \frac{p-r}{p}\binom{p}{r} = \frac{n-k}{p}\binom{p}{n-k}$ en $i_{p-r} = i\,n - (p-r)(i-1) = (n-k) + i\,k$ wordt, en indien men tegelijk de volgorde der beide, in i en in r of k te verrichten, sommatiën omkeert, overgaat in:

$$\frac{(m-n)!\,(n-p-2)!}{p!\,(m-1)!}\, l^{m-1} \sum_{n-p}^{n-1} {}_k \Big\{ (-)^{-n+p+k} \binom{p}{n-k} \frac{1}{k^{m-n+1}} .$$

$$.\sum_0^{m-n+1} i(-)^i \binom{m-n+1}{i} \frac{n-k}{(n-k)+ik}\Big\},$$ dat is eindelijk, wegens

de in (2) begrepen formule $\frac{1}{k^q} \sum_0^q i(-)^i \binom{q}{i} \frac{n}{n+ik} =$

$= \frac{q!}{(n+k)(n+2k)\ldots(n+qk)}$, in $\frac{(m-n)!(m-n+1)!(n-p-2)!}{p!\,(m-1)!\,n}$.

$$.\, l^{m-1} \sum_{n-p}^{n-1} k \frac{(-)^{-n+p+k} \binom{p}{n-k}}{(n+k)\,(n+2k)\ldots(n+(m-n)\,k)}.$$ Voor den tweeden term, zooals gezegd, gebruik makende van den reeds herleiden vorm van P_{p-1} (voor $i=0$), komt aldaar vooreerst

$$\int_0^{Y'} y'^{m-n}\, dy'\, P_{p-1\,(\text{voor } i\,=\,0)} = (-)^{p-1} \frac{n^{p-1}}{(p-1)!\,p!} \int_0^{Y'} y'^{m-n}\,.$$

$$.\,(Y'-y')^{p-1}\, dy' = (-)^{p-1} \frac{(m-n)!}{p!\,(m-n+p)!}\, n^{p-1}\, Y'^{m-n+p}$$

en dus verder voor dien term zelf $(-)^{p-1} \frac{(m-n)!}{p!\,(m-n+p)!\,n^{m-n+1}}$.

$$.\int_0^l z_p^{n-p-2} (l-z_p)^{m-n+p}\, dz_p = (-)^{p-1} \frac{(m-n)!\,(n-p-2)!}{p!\,(m-1)!\,n^{m-n+1}}\, l^{m-1};$$

en deze term in mindering gebracht en dan geschreven onder

den vorm $+ \frac{(m-n)!\,(m-n+1)!\,(n-p-2)!}{p!\,(m-1)!\,n}\, l^{m-1}$.

$.\frac{(-)^p \binom{p}{0}}{2n\,.\,3n\ldots(m-n+1)\,n}$, blijkt nu juist niet anders te zijn dan wat in den even gevonden eersten term zou bijkomen voor den veranderlijken aanwijzer $k=n$. De opname van den bedoelden tweeden of verbeteringsterm in de berekening kan dan ook geschieden door in den eersten term eenvoudig de bovengrens $n-1$ van k te vervangen door n; en dit gedaan zijnde, ziet men bij deeling door den volledigen

factor $\frac{(m-n)!\,(m-n+1)!\,(n-p-2)!\,(n-p-1)!}{(m-1)!\,m!}\,l^{m-1}$,
waarmede bij de tegenwoordige rekenwijze de kans $K_{m.n.p}$ in het eerste lid is aangedaan, werkelijk in allen deele de vroeger opgemaakte formule (3) voor deze kans terugkomen.

Na de voorgaande toepassing van de leerwijze der nieuwe veranderlijken gaan wij thans, zooals gezegd, er nog toe over aan te toonen, hoe de $(p+1)$-voudige integraal van de veranderlijken x_1 tot en met x_p en y, van welke integraal de kans $K_{m.n.p}$ afhankelijk werd gemaakt, ook door wijziging in de volgorde der te verrichten integratiën kan worden berekend. Latende voorloopig zoowel de vooropstaande eindige sommatie volgens den aanwijzer i als ook de daarnaast staande integratie volgens de eerste veranderlijke x_1 buiten beschouwing, zal in ons geval tot het voorgestelde doel liefst eene zoodanige herleidingsformule dienstbaar behooren te worden gemaakt, waarbij in iederen term de integratie naar y voorop wordt gebracht, omdat men dan het voordeel heeft, dat althans de factor $(y - i\,x_1)^{m-n}$ van de achterstaande functie, welke factor geene andere dan de beide veranderlijken y en x_1 bevat, vóór alle op x_2 tot en met x_p betrekkelijke integraalteekens kan worden geschreven, waardoor niet alleen bij de integratiën volgens deze laatste veranderlijken de functie zelve wordt vereenvoudigd, maar met name ook op de voorwaarde of begrenzing $0 < y - i\,x_1$ eerst later behoeft te worden gelet.

Stellende de in ons geval voorkomende functie $(y - i\,x_1)^{m-n}$. $.(l - S_p - (n-p)\,y)^{n-p-2}$, of zelfs in het algemeen eene willekeurige functie van de $p+1$ veranderlijken x_1 tot en met x_p en y — dat is, zoolang x_1 voorloopig als standvastig wordt opgevat, eigenlijk van de p veranderlijken x_2 tot en met x_p en y — door het functieteeken F voor, en, met behoud van de reeds vroeger ingevoerde notatie $S_k = x_1 + x_2 + + \ldots + x_k$, thans nog de overeenkomstige $S'_k = x_p + x_{p-1} +$

$+\ldots+x_k$ aannemende, zoodat steeds $S_p = S_k + S'_{k+1} = S_k + S'_{k+2} + x_{k+1}$ is, en bovendien de notatie $l_r = l - (n-p)\,y - S_{p-r}$ invoerende, kan, naar wij meenen, in de gegeven omstandigheden doelmatig gebruik worden gemaakt van de volgende algemeene herleidingsformule:

$$\int_{x_1}^{\frac{l-S_1}{n-1}} d\,x_2 \int_{x_2}^{\frac{l-S_2}{n-2}} d\,x_3 \ldots\ldots \int_{x_{p-2}}^{\frac{l-S_{p-2}}{n-p+2}} d\,x_{p-1} \int_{x_{p-1}}^{\frac{l-S_{p-1}}{n-p+1}} d\,x_p \,.$$

$$.\int_{x_p}^{\frac{l-S_p}{n-p}} d\,y\, F = \sum_0^{p-1} r(-)^r \int_{x_1}^{\frac{l-(p-r)x_1}{n-p+r}} dy \int_{x_1}^{\frac{l-(n-p+r)y-S_1}{p-r-1}} dx_2 \,.$$

$$.\int_{x_2}^{\frac{l-(n-p+r)y-S_2}{p-r-2}} d\,x_3 \ldots\ldots \int_{x_{p-r-1}}^{l-(n-p+r)y-S_{p-r-1}} d\,x_{p-r} \int_{y}^{\frac{l_r}{r}} dx_p \,.$$

$$.\int_{x_p}^{\frac{l_r-S'_p}{r-1}} d\,x_{p-1} \int_{x_{p-1}}^{\frac{l_r-S'_{p-1}}{r-2}} d\,x_{p-2} \ldots\ldots \int_{x_{p-r+2}}^{l_r-S'_{p-r+2}} d\,x_{p-r+1}\, F.$$

Waar het er in de eerste plaats op aankomt deze formule te bewijzen, schijnt het voor het goed begrip niet overbodig opmerkzaam te maken op een paar bijzonderheden, waardoor zij zich, hoe algemeen ook overigens, toch onderscheidt.

Vooreerst dat, terwijl overeenkomstig de bedoeling in elk der p termen van het tweede lid de integraal naar y voorop werd gebracht, de eerste dezer termen ($r = 0$) overigens in opklimmende orde alle differentialen van $x_2, x_3, \ldots, x_p$, de laatste term ($r = p - 1$) juist omgekeerd al die differentialen in afdalende orde $x_p, x_{p-1}, \ldots, x_2$ bevat, terwijl alle tusschentermen gemengd uit eene, elkander aanvullende, klimmende groep $x_2, x_3, \ldots, x_{p-r}$ en dalende groep $x_p, x_{p-1}, \ldots, x_{p-r+1}$ bestaan; (dat dus, om zoo te zeggen toevalligerwijze, de tweede term ($r = 1$) — bestaande uit de klimmende groep $x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}$ aangevuld door de zich nu tot het enkele element x_p bepalende dalende groep — dezelfde volgorde van differentialen vertoont als de reeds vermelde eerste term ($r = 0$), maakt op het gezegde geen inbreuk, te minder daar

in ieder geval die tweede en die eerste term zich van elkander onderscheiden onder anderen door hunne laatste ondergrenzen y en x_{p-1}).

Ten andere dat, terwijl in beide leden de grootheid x_1 steeds kleiner blijft dan alle veranderlijken x_2 tot en met x_p en y — want in het eerste lid leert de beschouwing der opvolgende ondergrenzen, dat $x_1 < x_2 < x_3 < .. < x_{p-1} < < x_p < y$ moet zijn, terwijl in den algemeenen term van het tweede lid uit de vooropstaande integraal naar y in verband met de even besproken dalende groep eenerzijds en uit de klimmende groep anderzijds op dezelfde wijze blijkt, dat zoowel $x_1 < y < x_p < x_{p-1} < x_{p-2} < \dots < x_{p-r+1}$ als $x_1 < < x_2 < x_3 < \dots < x_{p-r}$ moet wezen — tevens in alle termen de gezamenlijke veranderlijken aan eene gemeenschappelijke grensvoorwaarde gebonden zijn: in het eerste lid toch moet blijkens de laatste bovengrens $y < \frac{l-S_p}{n-p}$, dat is $0 < l - S_p - (n-p)\,y$, wezen; in den algemeenen term weder van het tweede lid moet op denzelfden grond $x_{p-r+1} < l_r - S'_{p-r+2} = l-(n-p)y - - S_{p-r} - S'_{p-r+2}$, dat is evenzoo $0 < l - S_p - (n-p)\,y$, blijven. En bovendien hebben alle termen deze bijzonderheid met elkander gemeen (die trouwens voor het eerste lid reeds vroeger, bij de afleiding der formule voor $K_{m.n.p}$, waaruit dat lid is overgenomen, werd opgemerkt), dat uit de verbinding telkens der vermelde ondergrenzen met de laatste bovengrens tevens alle verdere voor denzelfden term geldende bovengrenzen als noodwendige gevolgen te voorschijn komen: zoo besluit men, als vroeger, voor het eerste lid tot $S_1 + (n-1)\,x_2 < < S_2 + (n-2)\,x_3 < \dots < S_{p-1} + (n-p+1)\,x_p < S_p + (n-p)\,y < l$, waarin slechts opvolgend ieder lid in verband met het allerlaatste lid l behoeft beschouwd te worden; zoo volgt eveneens voor den algemeenen term van het tweede lid uit de bovenstaande daarop betrekkelijke ongelijkheden eensdeels $r\,y < r\,x_p < (r-1)\,x_{p-1} + S'_p < (r-2)\,x_{p-2} + S'_{p-1} < \dots < < x_{p-r+1} + S'_{p-r+2} < l_r = l-(n-p)\,y - S_{p-r}$, waarin voor de bovengrenzen van de dalende groep ieder lid in verband met het voorlaatste lid l_r te beschouwen is, en anderdeels $(p-r)\,x_1 < S_1 + (p-r-1)\,x_2 < S_2 + (p-r-2)\,x_3 < \dots <$

$< S_{p-r-1} + x_{p-r} < l - (n-p+r)\,y$ (want hierin is de laatste ongelijkheid niet anders dan de uiterste ongelijkheid $r\,y < < l - (n-p)\,y - S_{p-r}$ van zoo even), waarin men voor de bovengrenzen van y zelf en van de klimmende groep ieder lid in verband te brengen heeft met het laatste lid $l-(n-p+r)y$.

De vermelde bijzonderheden zijn nu voor het bewijs van onze algemeene herleidingsformule vooral dáárom van belang, omdat er uit blijkt, dat elke term van die formule in zekeren zin als een zelfde p-voudige integraal $\int^{p} d\,x_2\; d\,x_3 \,\ldots\, d\,x_{p-1}\,.$ $.\, d\,x_p\; d\,y\; F$, waarin de overigens onafhankelijke en in willekeurige volgorde te nemen veranderlijken steeds aan dezelfde voorwaarde $0 < l - S_p - (n-p)\,y$ gebonden zijn, te beschouwen is, maar waarbij die termen zich toch telkens van elkander onderscheiden door andere rangorde van grootte dier veranderlijken en, als natuurlijk gevolg hiervan, dan ook door andere waarden der termen zelve. Zoo geldt — overal zooals gezegd van de steeds kleinste grootheid x_1 afziende — voor het uit een enkelen term bestaande eerste lid de rangorde $x_2 < x_3 < \ldots . < x_{p-1} < x_p < y$, en, in overeenstemming met deze rangorde, stellen wij dat lid zelf door de verkorte notatie $(x_2\, x_3 \ldots . x_{p-1}\, x_p\, y)$ voor; voor den eersten term $(r = 0)$ van het tweede lid moet steeds $x_2 < x_3 < \ldots . < x_{p-1} < x_p$ in acht genomen worden, maar blijft het overigens vrijgelaten de veranderlijke y op eene der $\binom{p}{1}$ plaatsen naar willekeur, van $y < x_2$ af tot en met $x_p < y$, in deze rij der veranderlijken x in te schuiven, en in dezen zin duiden wij dien in wezenlijkheid uit $\binom{p}{1}$ bestanddeelen te vormen term door het teeken $\binom{x_2\, x_3 \ldots . x_{p-1}\, x_p}{y}$ aan; voor den tweeden term $(r = 1)$ van het tweede lid moet steeds zoowel aan $x_2 < x_3 < \ldots . < x_{p-1}$ als aan $y < x_p$ voldaan worden, maar is overigens geen der standen, die aan y en aan x_p, hetzij naast elkander hetzij met kleiner of grooter tusschenruimte, voor of tusschen of achter de overige veranderlijken gegeven

kunnen worden, uitgesloten; zoodat zij in de volledige rij der p veranderlijken de rangnummers 1 en 2, of 1 en 3, enz., of 1 en p, of 2 en 3, enz., of 2 en p, enz., of $p-1$ en p kunnen verkrijgen; en dit is de beteekenis, die wij hechten aan de notatie $\binom{x_2\, x_3 \ldots\ldots x_{p-1}}{y\, x_p}$ voor den bedoelden, alzoo uit $\binom{p}{2}$ onderdeelen bestaanden, tweeden term. Zoo voortgaande, ziet men dat het bewijs der aangevoerde formule nederkomt op het bewijs der symbolische gelijkheid $(x_2\, x_3 \ldots$ $\ldots\, x_{p-1}\, x_p\, y) = \binom{x_2\, x_3 \ldots\ldots x_{p-1}\, x_p}{y} - \binom{x_2\, x_3 \ldots\ldots x_{p-1}}{y\, x_p} +$

$$+\binom{x_2\, x_3 \ldots\ldots x_{p-2}}{y\, x_p\, x_{p-1}} - \ldots\ldots + (-)^r \binom{x_2\, x_3 \ldots\ldots x_{p-r}}{y\, x_p\, x_{p-1} \ldots\ldots x_{p-r+1}} +$$

$$+ \ldots + (-)^{p-2} \binom{x_2}{y\, x_p\, x_{p-1} \ldots\ldots x_3} + (-)^{p-1} \binom{\cdot}{y\, x_p\, x_{p-1} \ldots\ldots x_3\, x_2}.$$

En dit bewijs is nu niet moeielijk, indien men slechts opmerkt dat in het algemeen de identiteit

$$(-)^r \binom{x_2\, x_3 \ldots\ldots x_{p-r}}{y x_p\, x_{p-1} \ldots\ldots x_{p-r+2}} x_{p-r+1} = (-)^r \binom{x_2\, x_3 \ldots\ldots x_{p-r}}{y x_p\, x_{p-1} \ldots\ldots x_{p-r+1}} +$$

$+ (-)^{r+1} \binom{x_2\, x_3 \ldots\ldots x_{p-r-1}}{y\, x_p\, x_{p-1} \ldots\ldots x_{p-r+1}} x_{p-r}$ uitdrukt dat, als de dalende groep $y\, x_p\, x_{p-1} \ldots\ldots x_{p-r+1}$ op alle mogelijke wijzen wordt ingeschoven in de klimmende groep $x_2\, x_3 \ldots\ldots x_{p-r}$, de uitkomst — in overeenstemming met $\binom{p}{r+1} = \binom{p-1}{r} + \binom{p-1}{r+1}$ — alle mogelijke stelsels $\left(\text{ten getale van } \binom{p}{r+1}\right)$, en ook geene andere, omvat dan die of op x_{p-r+1} $\left(\text{ten getale van } \binom{p-1}{r}\right)$ of op x_{p-r} $\left(\text{ten getale van } \binom{p-1}{r+1}\right)$ eindigen. Dit opgemerkt zijnde, geeft namelijk de som van al zulke identiteiten, van $r=0$ tot en met $r=p-1$, onmiddellijk het verlangde.

[Alvorens nu de toepassing der op deze wijze, naar wij meenen, betoogde algemeene herleidingsformule op ons eigenlijke onderwerp onder handen te nemen, willen wij nog eene

enkele opmerking maken met betrekking tot het bijzondere geval $p=2$, waarin zij dus den meer beknopten vorm

$$\int_{x_1}^{\frac{l-x_1}{n-1}} d\,x_2 \int_{x_2}^{\frac{l-x_1-x_2}{n-2}} dy\,F = \int_{x_1}^{\frac{l-2x_1}{n-2}} dy \int_{x_1}^{l-(n-2)y-x_1} dx_2\,F -$$

$$- \int_{x_1}^{\frac{l-x_1}{n-1}} dy \int_{y}^{l-(n-2)y-x_1} d\,x_2\,F$$ aanneemt. Stelt men hierin namelijk de standvastige $l - x_1 = b\,(n-2)$ en tegelijkertijd $n = \infty$, dan gaat zij over in $\int_{x_1}^{b} d\,x_2 \int_{x_2}^{b} dy\,F = \int_{x_1}^{b} dy\,.$ $.\int_{x_1}^{(n-2)(b-y)} d\,x_2\,F - \int_{x_1}^{b} dy \int_{y}^{(n-2)(b-y)} d\,x_2\,F$, of, omdat nu deze beide laatste integralen zoowel de boven- als de ondergrens van y en bovendien de bovengrens van x_2 gemeen hebben en daarom tot eene enkele integraal bijeengebracht kunnen worden, $\int_{x_1}^{b} d\,x_2 \int_{x_2}^{b} dy\,F = \int_{x_1}^{b} d\,y \int_{x_1}^{y} d\,x_2\,F$. Behoudens het verschil in notatie is deze formule geene andere dan die, als uitbreiding van een daarin voor $x_1 = 0$ vervat theorema van Lejeune-Dirichlet, langs analytischen weg bewezen werd door Dr. V. A. Julius in eene noot op blz. 29 van zijne »Bijdrage tot de theorie der capillaire verschijnselen" in de Natuurkundige Verhandelingen der Kon. Akademie van Wetenschappen, Deel 24, 1885. Maar zoowel onze zoo even neêrgeschreven formule voor $p=2$ als de daarin voor $n=\infty$ vervatte formulen van Julius en van Lejeune-Dirichlet zijn weder begrepen in eene meer algemeene dubbele formule voor twee veranderlijken, die bij voorbeeld aldus is voor te stellen:

$$\int_{c}^{b} dy \int_{a+A'(y-b)}^{a+A(y-b)} d\,x\,F = \int_{a+A'(c-b)}^{a+A(c-b)} dx \int_{c}^{\frac{x-a+Ab}{A}} d\,y\,F -$$

$$- \int_{a+A'(c-b)}^{a} d\,x \int_{\frac{x-a+A'b}{A'}}^{\frac{x-a+Ab}{A}} d\,y\,F = \int_{a+A'(c-b)}^{a+A(c-b)} d\,x \int_{c}^{\frac{x-a+A'b}{A'}} d\,y\,F -$$

$$-\int_{a+A(c-b)}^{a} dx \int_{\frac{x-a+A'b}{A'}}^{\frac{x-a+Ab}{A}} dy\, F,$$

en van welke men zich gemakkelijk meetkundig of statisch rekenschap geeft als uitdrukking van het gewicht of de massa van een ongelijkslachtigen driehoek, die op rechthoekige coördinaten-assen O X en O Y zijn basis langs $y=c$ heeft, zijn top in (a, b), en zijne opstaande zijden met $\frac{1}{A}$ en $\frac{1}{A'}$ tot richtings-coëfficienten, terwijl zijn soortelijk gewicht of massa door de willekeurige functie F der beide coördinaten x en y wordt voorgesteld.]

Wij komen thans tot de toepassing der algemeene herleidingsformule. Daartoe is eigenlijk $F=(y-i\,x_1)^{m-n}$. $.(l-S_p-(n-p)\,y)^{n-p-2}$ te substitueeren; maar, zooals reeds gezegd, de herleidingsformule is er juist op ingericht, in elken term van het tweede lid den factor $(y-i\,x_1)^{m-n}$ vóór alle op x_2 tot en met x_{p-r} en op x_p tot en met x_{p-r+1} betrekkelijke integraalteekens te kunnen brengen, zoodat wij voorloopig alleen met $F=(l-S_p-(n-p)\,y)^{n-p-2}=$ $=(l_r+S_{p-r}-S_p)^{n-p-2}=(l_r-S'_{p-r+2}-x_{p-r+1})^{n-p-2}$ te doen hebben. En dit zoo zijnde, wordt de laatste integraal in den algemeenen term van het tweede lid, namelijk $\int_{x_{p-r+2}}^{l_r-S'_{p-r+2}} dx_{p-r+1}\,F$, gelijk $\frac{(l_r-S'_{p-r+3}-2\,x_{p-r+2})^{n-p-1}}{n-p-1}$;

dus de voorlaatste integraal (komende door hier vóór te plaatsen

$$\int_{x_{p-r+3}}^{\frac{l_r-S'_{p-r+3}}{2}} dx_{p-r+2}),\ \text{gelijk}\ \frac{(n-p-2)!\,(l_r-S'_{p-r+4}-3\,x_{p-r+3})^{n-p}}{2!\,(n-p)!};$$

en, zoo voortgaande, komt voor de geheele dalende groep

$$\int_{y}^{\frac{l_r}{r}} dx_p\,\frac{(n-p-2)!\,(l_r-r\,x_p)^{n-p+r-3}}{(r-1)!\,(n-p+r-3)!}=\frac{(n-p-2)!\,(l_r-r\,y)^{n-p+r-2}}{r!\,(n-p+r-2)!}.$$

Wat nu de verdere, zich over de klimmende groep uitstrekkende, integratiën, te beginnen met die volgens x_{p-r}, betreft, schijnt het voor de beknoptheid der notatiën dienstig,

reeds hier weder als vroeger in plaats van den veranderlijken aanwijzer $r = -n + p + k$ den aanwijzer k in te voeren, waardoor $l_r - ry = l - (n - p + r)y - S_{p-r} = l - ky - S_{n-k}$ en dus de integraal in x_{p-r} of x_{n-k} gelijk $\int_{x_{n-k-1}}^{l-ky-S_{n-k-1}} dx_{n-k}$.

$$\cdot \frac{(n-p-2)!\,(l-ky-S_{n-k-1}-x_{n-k})^{k-2}}{(-n+p+k)!\,(k-2)!} =$$
$$= \frac{(n-p-2)!\,(l-ky-S_{n-k-2}-2\,x_{n-k-1})^{k-1}}{(-n+p+k)!\,(k-1)!}$$

wordt; derhalve de integraal in x_{p-r-1} of x_{n-k-1}, door hier vóór te plaatsen $\int_{x_{n-k-2}}^{\frac{l-ky-S_{n-k-2}}{2}} d\,x_{n-k-1}$, gelijk

$$\frac{(n-p-2)!\,(l-ky-S_{n-k-3}-3\,x_{n-k-2})^{k}}{2!\,(-n+p+k)!\,k!};$$

en, zoo voortgaande, wordt eindelijk de integraal in x_2 gelijk $\dfrac{(n-p-2)!\,(l-ky-(n-k)\,x_1)^{n-3}}{(n-k-1)!\,(-n+p+k)!\,(n-3)!}$ bevonden. Zoover gevorderd zijnde, is nu de integratie volgens y en de sommatie volgens r of k aan de beurt; maar, zooals gezegd, voor deze integratie moet thans de tot nog toe weggelaten factor $(y - i\,x_1)^{m-n}$ weder worden hersteld, waarna bij substitutie in de vroeger voor de kans $K_{m.n.p}$ opgemaakte uitdrukking nog eene integratie naar x_1 en ten slotte eene sommatie volgens i moet plaats hebben. Keert men dan de volgorde der beide eindige sommatiën, in i en in r of k, om; neemt men in aanmerking, dat evenals bij de voorgaande rekenwijze ook hier weder eene splitsing van de sommatie naar i in twee onderdeelen noodig wordt — omdat voor $i = 1$ tot en met $m - n + 1$ de tot nog toe als x_1 aangeteekende ondergrens van y wegens de bijkomende begrenzing $0 < y - i\,x_1$ moet vervangen worden door $i\,x_1$ en als gevolg daarvan de bovengrens $\frac{l}{n}$ van x_1 wegens $i\,x_1 < \frac{l-(n-k)\,x_1}{k}$ door $\frac{l}{(n-k)+ik}$; terwijl daarentegen voor $i = 0$ de oorspronkelijke grenzen $x_1 < y < \frac{l-(n-k)\,x_1}{k}$ en dus ook $0 < x_1 < \frac{l}{n}$

hare geldigheid behouden — en voert men tegelijkertijd eene deeling door den factor $(n-p-2)!$ uit, dan is de formule

$$\frac{(m-n)!\,(m-n+1)!\,(n-p-1)!}{(m-1)!\,m!}\,l^{m-1}\,K_{m.n.p}=$$

$$=\frac{1}{(n-3)!}\sum_{n-p}^{n-1}{}_k\left[\frac{(-)^{-n+p+k}}{(n-k-1)!\,(-n+p+k)!}\left\{\sum_{1}^{m-n+1}{}_i(-)^i\binom{m-n+1}{i}\right.\right.$$

$$\cdot\int_0^{\frac{l}{(n-k)+ik}}dx_1\int_{ix_1}^{\frac{l-(n-k)x_1}{k}}dy(y-ix_1)^{m-n}(l-ky-(n-k)x_1)^{n-3}+$$

$$\left.\left.+\int_0^{\frac{l}{n}}d\,x_1\int_{x_1}^{\frac{l-(n-k)x_1}{k}}d\,y\,y^{m-n}\,(l-k\,y-(n-k)\,x_1)^{n-3}\right\}\right]$$

verkregen, waarvan nu nog de uitrekening overblijft. Tot dat einde kan met vrucht gebruik worden gemaakt van de reeds in het eerste gedeelte van dit opstel opgemaakte, aan (2) voorafgaande, herleidingsformule, en wél voor zooveel de tegenwoordige eerste dubbel-integraal betreft, van het aldaar reeds ter sprake gekomen bijzondere geval $B=C$, waarvoor die formule, als men teveus $C=i$ neemt, wordt

$$\int_0^{\frac{L}{A+i}}dy\int_{iy}^{L-Ay}\frac{(z-iy)^{m-n-1}}{(m-n-1)!}\,\frac{(L-Ay-z)^{n-2}}{(n-2)!}\,dz=\frac{L^{m-1}}{(A+i)(m-1)!};$$

daarentegen, voor de tegenwoordige tweede dubbel-integraal, van het bijzondere geval $B=1$, $C=0$, waarvoor zij wordt

$$\int_0^{\frac{L}{A+1}}dy\int_y^{L-Ay}\frac{z^{m-n-1}}{(m-n-1)!}\,\frac{(L-A\,y-z)^{n-2}}{(n-2)!}\,d\,z=$$

$$=\frac{L^{m-1}}{A\,(m-1)!}\left\{-\frac{1}{(A+1)^{m-n}}+1\right\}.$$ Vervangt men namelijk in deze beide formulen y door x_1, z door y, L door $\frac{l}{k}$, A door $\frac{n-k}{k}$ en n door $n-1$, dan geven zij voor ons doel

$$\int_0^{\frac{l}{(n-k)+ik}} dx_1 \int_{ix_1}^{\frac{l-(n-k)x_1}{k}} (y-ix_1)^{m-n}(l-ky-(n-k)x_1)^{n-3}dy=$$

$$=\frac{(m-n)!\,(n-3)!\,l^{m-1}}{((n-k)+ik)(m-1)!}\cdot\frac{1}{k^{m-n+1}} \text{ en } \int_0^{\frac{l}{n}} dx_1 \int_{x_1}^{\frac{l-(n-k)x_1}{k}} y^{m-n}\,.$$

$$.\,(l-ky-(n-k)x_1)^{n-3}\,dy=\frac{(m-n)!\,(n-3)!\,l^{m-1}}{(n-k)\,(m-1)!}\left\{-\frac{1}{n^{m-n+1}}+\right.$$

$\left.+\frac{1}{k^{m-n+1}}\right\}$, zoodat bij substitutie en bij deeling door $\frac{(m-n)!\,l^{m-1}}{(m-1)!}$, en met inachtneming, dat de laatste term van deze laatste formule, juist zijnde wat de eerste formule geeft voor $i=0$, bij deze eerste formule kan worden opgenomen, komt $\frac{(m-n+1)!\,(n-p-1)!}{m!}K_{m.n.p}=$

$$=\frac{1}{p!}\sum_{n-p}^{n-1}{}_k\left[(-)^{-n+p+k}\binom{p}{n-k}\left\{\frac{1}{k^{m-n+1}}\sum_0^{m-n+1}{}_i(-)^i\binom{m-n+1}{i}\right.\right.\,.$$

$$\left.\left..\,\frac{n-k}{(n-k)+ik}-\frac{1}{n^{m-n+1}}\right\}\right].$$ Hierin wordt nu op grond van de formule (2) de eerste term $\frac{1}{k^{m-n+1}}\sum_0^{m-n+1}{}_i(-)^i\binom{m-n+1}{i}$.

$$.\,\frac{n-k}{(n-k)+ik}=\frac{(m-n+1)!}{n\,(n+k)\,(n+2k)\,\ldots\,(n+(m-n)k)};$$

terwijl voor den tweeden term, na den factor $\frac{1}{n^{m-n+1}}$ vóór het $\sum_k$-teeken gebracht te hebben, valt op te merken, dat $\sum_{n-p}^{n-1}{}_k(-)^{-n+p+k}\binom{p}{n-k}$ niet anders dan de ontwikkeling van het binomium $(1-1)^p$ met uitsluiting van den laatsten term $(-1)^p$ en bijgevolg gelijk $-(-1)^p$ is. De deeling door den coëfficient van $K_{m.n.p}$ uitvoerende, is alzoo te schrijven $K_{m.n.p}=$

$$= \frac{m!}{p!\,(n-p-1)!}\left\{\sum_{n-p}^{n-1}{}_{k}\,\frac{(-)^{-n+p+k}\binom{p}{n-k}}{n\,(n+k)\,(n+2\,k)\ldots(n+(m-n)\,k)}+\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^{p}}{n\,.\,2\,n\,.\,3\,n\ldots(m-n+1)\,n}\right\},$$ of, indien men, zooals hier geschieden kan, den tweeden term in den eersten inlijft door diens bovengrens $n-1$ te veranderen in n, en daarna den factor n van den noemer nog naar voren brengt, werkelijk weder dezelfde formule (3), die in het vorenstaande reeds op twee andere wijzen werd verkregen.

Zooals uit den aanhef van dit opstel blijkt, gaf de vraag naar de kans dat, als eene gegeven rechte lijn op willekeurige wijze in een gegeven aantal segmenten verdeeld wordt, uit iedere groep van een bepaald aantal dezer segmenten telkens een gesloten veelhoek kan worden gevormd, aanleiding tot het in dit opstel ingestelde onderzoek, dat op eene eenigzins algemeener vraag betrekking heeft. Ook op andere wijze kan men aan de eerst gestelde vraag uitbreiding geven en zoodoende weder tot eene andere orde van verwante vraagstukken geraken; bij voorbeeld door te verlangen, dat niet uit elke groep van een bepaald aantal segmenten, maar slechts uit een te voren gegeven aantal van deze groepen, een veelhoek zal kunnen worden zamengesteld, en daarentegen uit de overige groepen van dezelfde soort niet. In een algemeen onderzoek van het in dezen zin uitgebreide vraagstuk heb ik mij niet begeven, en ik maak daarvan dan ook alleen melding om de uitkomst mede te deelen, die ik voor een eenvoudig geval van deze soort langs meetkundigen weg heb verkregen. Mij voorstellende te bepalen, hoe groot de kans is dat, bij verdeeling van eene gegeven lijn l in vier segmenten, uit elke der vier groepen van deze segmenten drie aan drie een driehoek te vormen is; en de overeenkomstige kans, dat dit voor slechts drie van deze vier groepen het geval zal zijn; en evenzoo voor twee van deze groepen;

en voor slechts ééne groep; en eindelijk voor geene enkele; maakte ik gebruik van de opmerking, dat in een regelmatig tetraëdrum de som der afstanden van een willekeurig inwendig punt tot de vier zijvlakken, steeds gelijk zijnde aan het drievoud van de som der vier tetraëdra, waarin het gegevene uit dit punt als gemeenschappelijken top kan worden verdeeld — dat is dus het drievoud van het gegeven tetraëdrum zelf — gedeeld door den inhoud van ieder zijvlak, ook gelijk is aan de hoogte. Op dien grond zijn de vier segmenten van eene willekeurige verdeeling van de lijn l steeds te beschouwen als de genoemde afstanden van een overeenkomstig punt binnen een regelmatig tetraëdrum met hoogte l, en het tetraëdrum zelf als het beeld van de gezamenlijke verdeelingen in vier segmenten. Kiest men nu naar willekeur drie uit de vier segmenten, dan kunnen deze slechts dán een driehoek vormen, wanneer elke der drie daaraan gelijke afstanden van het bijbehoorende punt kleiner is dan de som der beide anderen, en dus ook, gelet op de regelmaat van het tetraëdrum, wanneer elke der drie afstanden, die de uit het hoekpunt tegenover het vierde zijvlak genomen projectie van genoemd punt op dit zijvlak heeft tot de zijden van hetzelfde zijvlak, kleiner is dan de som der beide andere afstanden, met andere woorden kleiner dan de halve som der drie afstanden, dat is kleiner dan de halve hoogte van het zijvlak zelf. Daartoe moet alzoo de bedoelde projectie vallen binnen den gelijkzijdigen driehoek, die de middens der zijden van het zijvlak tot hoekpunten heeft. Zoodra die projectie daarentegen komt binnen een der drie overblijvende of zijdelingsche driehoeken, is één der drie beschouwde afstanden of segmenten grooter dan de som der beide anderen, en is er dus althans uit deze drie geen driehoek zamen te stellen. Door nu na te gaan, binnen welke gedeelten van het tetraëdrum alle punten liggen, waarvan de projectiën uit de hoekpunten op de overstaande zijvlakken alle vier binnen de overeenkomstige centrale driehoeken komen te vallen; en evenzoo voor de punten, hebbende drie dezer vier projectiën binnen de centrale driehoeken, maar de vierde projectie binnen een der zijdelingsche; en evenzoo voor het geval van twee centrale en twee

zijdelingsche driehoeken; voor dat van één centralen en drie der zijdelingsche driehoeken; en eindelijk voor dat van vier zijdelingsche driehoeken; en door dan de inhouden dezer verschillende gedeelten ieder te deelen door den inhoud van het gezamenlijk tetraëdrum, ben ik tot de volgende uitkomst geraakt:

kans, dat uit elke der vier groepen van de vier segmenten drie aan drie een driehoek kan worden gevormd, $=\frac{1}{15}$ (wat dit betreft in overeenstemming met deze zelfde waarde voor $m=4$, $n=3$, $p=2$ in de boven medegedeelde tabel);

kans, dat uit drie dezer vier groepen een driehoek is te vormen (en uit de vierde niet), $=\frac{4}{105}$;

kans, dat dit het geval is voor twee groepen (en voor de beide anderen niet), $=\frac{16}{105}$;

kans voor slechts ééne groep (voor de drie overigen niet), $=\frac{11}{35}$;

kans voor geene enkele der vier groepen, $=\frac{3}{7}$;

gevende de som dezer vijf, zich onderling als de getallen 7, 4, 16, 33, 45 verhoudende kansen naar behooren de eenheid terug.

Mocht nog eenige toelichting verlangd worden omtrent het in den aanhef gezegde, dat namelijk uit een willekeurig aantal n gegeven lijnen, waarvan de grootste kleiner is dan de som van alle anderen, steeds een gesloten n-hoek met deze lijnen tot zijden is zamen te stellen, dan zou daartoe wellicht het volgende kunnen dienen.

Vooreerst is een driehoek uit drie gegeven zijden altijd mogelijk, mits slechts de grootste zijde kleiner zij dan de som der beide anderen: want, beschrijvende in dit geval uit ieder uiteinde der grootste zijde als middelpunt een cirkel met eene der andere zijden tot straal, kunnen deze beide cirkels noch buiten elkander liggen, omdat dan de eerste zijde grooter zou zijn dan de beide anderen te zamen, noch de één binnen den anderen, omdat dan de eerste zijde kleiner dan de straal van den grootsten cirkel, en dus niet de grootste

zijde zou zijn. De beide cirkels moeten elkander dus snijden; de driehoek bestaat dus.

Overgaande tot de n gegeven lijnen, die aan de gestelde voorwaarde voldoen, bestaat dus ook een driehoek, hebbende de grootste van dezen tot eerste zijde, ééne — onverschillig welke — der anderen tot tweede, en de som van alle $n-2$ overige lijnen tot derde zijde. Naarmate men nu bij onveranderde lengte der beide eerstgenoemde zijden van dezen driehoek den ingesloten hoek verkleint, zal men ook de derde zijde verkorten, dat is kleiner maken dan de evengenoemde som van $n-2$ gegeven lijnen; en men kan de verkleining van den hoek derhalve steeds gering genoeg nemen, opdat deze derde zijde toch grooter blijve dan ieder van de $n-2$ lijnen afzonderlijk, uit wier som zij aanvankelijk bestond. Dit doende, verkeert die nieuwe derde zijde met betrekking tot deze $n-2$ lijnen in hetzelfde geval als de even beschouwde grootste der n gegeven lijnen met betrekking tot de toen overblijvende $n-1$ lijnen. Men kan dus op die nieuwe zijde eene geheel dergelijke constructie en redeneering herhalen als zoo even voor de eerste zijde van den driehoek, en zoodoende door aansluiting aan dezen driehoek een vierhoek verkrijgen, hebbende de grootste gegeven lijn tot eerste zijde, twee andere dezer lijnen tot tweede en tot derde zijde, en de som van alle $n-3$ overige lijnen tot vierde zijde; welke vierde zijde dan op dezelfde wijze weder verkort kan worden om tot een vijfhoek over te gaan enz. totdat ten laatste alle n gegeven lijnen verbruikt zijn om daaruit een — tusschen zekere grenzen willekeurigen — n-hoek te vormen.

KORTE INHOUD VAN DE LEZINGEN OP DE WETENSCHAPPELIJKE VERGADERINGEN GEHOUDEN IN DE WINTERS 1889—1890 EN 1890—1891.

1ste Vergadering op 30 October 1889.

Spreker: de Heer A. N. GODEFROY.
Over het verband tusschen den cirkel en de toegevoegde gelijkzijdige hyperbool met dezelfde middellijn.

Zoowel bij den cirkel als bij de toegevoegde hyperbool met dezelfde middellijn is het vierkant van de ordinaat gelijk aan het produkt van de deelen der middellijn, gemeten van uit het voetpunt der ordinaat tot elk harer uiteinden.

In verband hiermede werd de machtlijn van cirkels besproken, hetzij deze elkaar al of niet snijden; in het laatste geval komen de toegevoegde gelijkzijdige hyperbolen als voortzetting van de meetkundige plaats te voorschijn en bepalen door hare snijpunten de macht- of poollijn. Hebben de cirkels hetzelfde middelpunt, dan ligt de machtlijn op oneindigen afstand. De oorsprong der hyperbolische trigonometrische lijnen werd aangestipt.

Als toepassing werd vervolgens een vraagstuk behandeld, voorkomende bij STURM in zijne vertaling van de werken van ARCHIMEDES (1670) waarbij tweeërlei oplossing mogelijk is. De eene behoort bij den cirkelomtrek, de andere bij de toegevoegde gelijkzijdige hyperbool.

Er werd gewezen op eene vrij nauwkeurige benaderde waarde van π, namelijk $\frac{3}{5}(3+\sqrt{5}) = 3{,}14164074...$ die tot

op de tienduizendste deelen nauwkeurig is en zeer gemakkelijk is te construeeren. Daarbij werd een zeer nauwkeurig benaderde constructie in herinnering gebracht van veelhoeken, aanvangende bij den zeven-hoek, en die gevonden is door den Hertog KAREL BERNHARDT VAN SAKSEN-WEIMAR-EISENACH.

Voorts werd eene graphische constructie gegeven van de kromme, door LAURENT »*courbe du diable*" genoemd, en welker vergelijking is:

$$y^4 - 96\,a^2\,y^2 = x^4 - 100\,a^2\,x^2.$$

Deze kromme wordt door CRAMER behandeld in zijn werk »Analyse des Lignes Courbes Algébriques".

Uit de constructie, door een met crayon geteekend figuur opgehelderd, bleek opnieuw de samenhang van cirkel en toegevoegde gelijkzijdige hyperbool.

Dit was insgelijks het geval bij de beschouwing van de doorsneden van het ringoppervlak of *tore*, waartoe spreker nu overging, en die met teekeningen werd toegelicht. Een der doorsneden komt overeen met een ovaal van CASSINI, een andere met de voetpuntslijn van eene ongelijkzijdige hyperbool, die voor een bijzonder geval overgaat in de *Lemniscaat van* BERNOUILLI.

De doorsnede met een dubbelrakend vlak bleek te voldoen aan de stelling van YVON VILLARCEAU; zij bestaat uit twee elkaar snijdende cirkelomtrekken met den straal $\frac{1}{2}(R + r)$, waar r den binnen-, R den buitenstraal van den ring voorstelt.

Daarna ging de spreker over tot de beschouwing van het hyperbolisch omwentelingsvlak $z^2 = x^2 + y^2 - r^2$, en werd er op gewezen, hoe dit beschreven wordt door een gelijkzijdige hyperbool, welker middellijn een koorde van vaste richting is van een cirkel als richtlijn. Het blijkt dan, dat aan de uiteinden der middellijn, die loodrecht is op de richting der koorde, het vlak eindigt met twee elkaar rechthoekig snijdende lijnen, zijnde de hyperbool met de middellijn gelijk nul. Ter voortzetting van het oppervlak moet nu de toegevoegde gelijkzijdige hyperbool van de richtlijn genomen worden, met eene gelijkzijdige hyperbool tot beschrijvende lijn, wier as loodrecht op het vlak dezer richtlijn is gesteld, en die tot middellijn heeft de koorde der richtlijn.

Deze beschouwing werd uitgebreid tot oppervlakken van den derden graad, en daarbij aangetoond de toegevoegde derdemachtslijnen, waarvan de wording werd verklaard uit het algemeene oppervlak van den derden graad met parabool en rechte lijn als richtlijnen en cirkels met toegevoegde gelijkzijdige hyperbolen als beschrijvende lijnen.

Ten slotte behandelde spreker oppervlakken van den derden graad met centrum, ontstaande uit hyperbolen als richtlijnen en kegelsneden als beschrijvende lijnen. Daarbij werd nog een teekening vertoond van zulk een derde-machtsoppervlak, $z^3 = x(a^2 + y^2)$, en een ander zonder centrum $z^3 = axy$, waarmede spreker zijne voordracht besloot.

2e Vergadering op 23 November 1889.

Spreker: Dr. Jan de Vries.
Over het vraagstuk der vlakke configuraties.

Een configuratie van lijnen en vlakken is een figuur van zoodanige samenstelling, dat alle lijnen hetzelfde aantal vlakken, alle vlakken hetzelfde aantal lijnen dragen.

Wordt zulk een *cf* door een vlak gesneden, dan vormen de doorgangen een uit punten en lijnen samengestelde vlakke *cf.*

Ook uit punten en vlakken kunnen *cff* gevormd worden, bij voorbeeld de hoekpunten en vijfpuntige diagonaal-vlakken van het twintigvlak.

Een vlakke *cf* wordt voorgesteld door het teeken (p_π, l_λ); elke der p punten draagt π lijnen, elke der l lijnen bevat λ punten der *cf.* Het vraagstuk der *cff* verlangt nu te bepalen hoevele verschillende *cff* aan vier getallen beantwoorden, die door de vergelijking $p\pi = l\lambda$ verbonden zijn. Twee *cff* heeten verschillend, zoodra zij niet door dezelfde tabel kunnen voorgesteld worden, waarin elk punt door een getal is aangewezen.

Voor π en λ gelijk 2 komen de veelhoeken.

De *cf* met $\pi = 2$, $\lambda = 3$ worden afgeleid uit de volledige

veelzijden door het weglaten van een bepaald aantal snijpunten der zijden. De afgezonderde punten bepalen dan met de zijden een complementaire *cf*. Twee *cff* met verschillend complement moeten dan ook in samenstelling verschillen. Door drie verschillende vervormingen kunnen uit een *cf* met indices 2, 3 afgeleid worden alle *cff* met dezelfde indices, maar twee lijnen en drie punten meer bevattende.

Een *cf* n_3 bestaat minstens uit 7 *pp* en 7 *ll*.

Het blijkt, dat *cf* 7_3 en *cf* 8_3 niet bestaanbaar zijn. Uit de beschouwing van de beide *pp*, welke in een 9_3 niet met een bepaald punt der *cf* verbonden zijn, blijkt, dat er drie 9_3 bestaan, welke alle lineair kunnen geconstrueerd worden, als het samenstel van drie driehoeken $a\,b\,c$, $a'\,b'\,c'$, $a''\,b''\,c''$, zoodat a', b', c' op bc, ca, ab en a'', b'', c'' op $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$ liggen. Het verschil tusschen de drie *cff* ligt dan hierin, dat

$a''b''$ bij I door c, bij II door a, bij III door b
$b''c''$ bij I door a, bij II door b, bij III door a
$c''a''$ bij I door b, bij II door c, bij III door c

gaat.

Door I gaan alle krommen van den derden graad van een bundel, waarvan de *pp* der *cf* de basis vormen. Op de kromme van den derden graad, om II beschreven, valt elk punt met zijn negende tangentiaalpunt samen, dat wil zeggen, trekt men door een punt de raaklijn aan de kromme, dan komt men in een tweede punt der *cf* terecht, terwijl de raaklijn in dit tweede punt een derde punt der *cf* uitsnijdt enz.

Spreker vertoonde de teekeningen voor de drie mogelijke 9_3, de negen mogelijke 10_3 en voor eenige hoogere *cff*.

Door Schoenflies zijn de regelmatige n_3 onderzocht, dat wil zeggen *cff*, welke ten opzichte van elk harer *pp* gelijksoortig zijn samengesteld. Hij bewees, dat elk punt dan voorkomt in een aantal tot de *cf* behoorende driehoeken, dat 6, 4, 3, 2 of 0 bedraagt.

De spreker eindigde zijne voordracht met te wijzen op de toepassing der *cff* bij krachtenveelhoeken, draadveelhoeken en kinematische onderzoekingen der »Mechanismen mit Bandtrieb” door Jung en Burmeister gegeven.

3e Vergadering op 14 December 1889.

Spreker: de Heer J. Cardinaal.

Over gebogen oppervlakken, ontstaan uit projectieve grondvormen.

1. Vooraf werden eenige redenen aangevoerd, waarom een studie van gebogen oppervlakken van hoogere orden van belang is: hun voorkomen in sommige andere wetenschappen, het bestaan op hun oppervlak van bijzondere lijnen. Dit werd toegelicht door vergelijking van de bijzondere punten, die bij krommen van de derde en van de vierde orde ontstaan, zooals dubbelpunten, keerpunten, dubbelknoop, snavelpunt, verschillende soorten van tripelpunten.

2. Het ontstaan van gebogen oppervlakken uit projectieve grondvormen werd door eenige voorbeelden toegelicht als:

De kegelsnede, en in verband daarmede het hyperbolische oppervlak van de tweede orde;

De vlakke kromme lijn van de vierde orde, en in verband daarmede het oppervlak van de vierde orde.

3. Het ontstaan van dubbelpunten en dubbelkrommen op gebogen oppervlakken door het samenvallen van punten of gedeelten der beide basiskrommen, en het geval dat de dubbelkromme een kegelsnede is.

4. Bij twee projectieve bolbundels treedt dit laatste in; alsdan is de oneindig verwijderde denkbeeldige cirkel dubbelkromme.

5. Om zich deze vorming beter voor te stellen wordt een stelsel bollen gedacht, namelijk een stelsel, dat door den orthogonaalbol van vier bollen bepaald is, en dat bestaat uit alle bollen, die dezen orthogonaalbol orthogonaal snijden. Tevens wordt een afgeleid ruimtestelsel gedacht, bestaande uit de poolvlakken dezer bollen, ten opzichte van een bepaald punt genomen.

Een oppervlak van den tweeden graad O_2 in dit laatste stelsel komt overeen met een oppervlak O_4 in het eerste, dat den oneindig verwijderden denkbeeldigen cirkel tot dubbelkromme heeft. Met den orthogonaalbol komt dan eveneens een oppervlak van de tweede orde overeen ($K_1{}^2$).

6. Het aldus gevormde oppervlak O_4 is een algemeene cyclide. Men verkrijgt bijzondere typen op de navolgende wijzen:

a. Het oppervlak O_2 kan een bijzondere gedaante hebben, bij voorbeeld die van een kegeloppervlak. Dit geeft cycliden met twee dubbelpunten (kegelpunten).

b. Dit kegeloppervlak kan nog het oppervlak $K_1{}^2$ in twee punten raken. Dit doet cycliden met vier kegelpunten ontstaan. De laatste soort doet de cycliden van DUPIN ontstaan, waarbij nog de twee laatstgemelde kegelpunten in het oneindige liggen.

7. Van deze cycliden onderscheidt men de soorten *ringcyclide*, *spilcyclide* en *hoorncyclide*. Bij de eerste zijn alle kegelpunten imaginair, bij de tweede en derde zijn twee kegelpunten reëel. Bij de tweede zijn alle doorsneden door de bestaanbare kegelpunten reëele krommen, terwijl deze bij de derde imaginair kunnen zijn. Van de eerste twee soorten werden modellen vertoond.

8. Van dit bijzondere geval komt men tot een meer algemeen geval, waarin men niet meer te doen heeft met een stelsel bollen met gemeenschappelijken orthogonaalbol, maar met een stelsel oppervlakken van de tweede orde met gemeenschappelijk kernoppervlak, en gaande door een gemeenschappelijke kegelsnede. Deze kegelsnede treedt alsdan in het oppervlak O_4 als dubbelkegelsnede op.

9. Van dit oppervlak zijn op te merken:

a. De zestien daarop liggende rechte lijnen. Deze hebben tot overeenkomstige rechten in de afgeleide ruimte die beschrijvende lijnen van O_2, welke tevens raaklijnen zijn van $K_1{}^2$. Vier lijnen van elk stelsel van O_2 raken aan $K_1{}^2$; met elk dezer komen overeen twee elkaar snijdende lijnen op O_4 gelegen. In het geheel liggen dus op O_4 zestien rechte lijnen, elk gesneden door vijf andere.

b. Deze configuratie geeft aanleiding tot vijf dubbelrakende kegels, welker beschrijvende lijnen dubbelraaklijnen zijn, en welker raakvlakken dubbelraakvlakken zijn.

10. Bijzondere vormen van het oppervlak O_2, bij voorbeeld kegelvorm met raking aan $K_1{}^2$, geven wederom aanleiding

tot oppervlakken van de vierde orde met kegelpunten. Er is evenwel een bijzonder geval, dat nog meer aanleiding geeft tot beschouwing, dat is het geval, dat O_2 door het punt Y_1 der afgeleide ruimte gaat, hetwelk overeenkomt met alle punten van het vlak der dubbelkegelsnede. Alsdan splitst zich O_4 in dit vlak en in een oppervlak van de derde orde O_3.

11. Het is duidelijk, dat de zestien gemelde rechte lijnen hier ook optreden. Er komen er evenwel nog elf bij, ontstaande:

a. Uit de twee rechte lijnen van O_2, gaande door Y_1 met welke drie rechten op O_3 overeenkomen.

b. Uit de acht kegelsneden door Y_1 gaande en K_1^2 dubbel rakende.

12. Nu wordt afgeleid, dat men een stelsel rechten verkrijgt van 27, zoodanig, dat tien gesneden worden door eenzelfde. Modellen van het algemeene geval en van het bijzondere met kegelpunten werden getoond.

4e Vergadering van 18 Januari 1890.

Spreker: de Heer J. C. KLUYVER.

Over SCHUBERT's methode op het gebied van de meetkunde van het aantal.

Een van de nieuwste richtingen in de tegenwoordige meetkundige wetenschap is de zoogenaamde »Meetkunde van het aantal". Daaronder verstaat men de theorie, die zoo algemeen mogelijk het antwoord tracht te leveren op deze vraag: »Hoeveel meetkundige figuren van bepaalde soort voldoen aan gegeven voorwaarden?" Analytisch vertolkt luidt die vraag blijkbaar aldus: »Hoe groot is het aantal oplossingen van een gegeven stelsel stelkundige vergelijkingen?"

Daarop geeft de bekende stelling van BEZOUT het antwoord; men zou derhalve kunnen meenen, dat men behalve die stelling in de meetkunde van het aantal geen verdere hulpmiddelen noodig had. Toch is dat geenszins het geval. In de eerste plaats is het dikwijls onmogelijk de vergelijkingen

neer te schrijven, die de analytische voorstelling zijn van meetkundige voorwaarden, waaraan een of andere figuur moet voldoen; in de tweede plaats moet het aantal oplossingen, zooals de stelling van Bezout dat levert, dikwijls met een aantal oneigenlijke oplossingen worden verminderd.

Dat is waarschijnlijk de reden, dat onderzoekingen, zooals de meetkunde van het aantal die bedoelt, hoofdzakelijk uit lateren tijd dagteekenen. De eerste uitkomsten op dit gebied verkreeg wel Steiner; in ruime mate werden zij vermeerderd door Chasles en Zeuthen, toen eerstgenoemde zijn bekende karakteristieken-theorie had opgesteld, terwijl daarna door Cayley, Salmon, Sturm, Hirst, Jonquières en vele anderen talrijke en belangwekkende uitkomsten zijn afgeleid.

Toch zouden deze onderzoekingen min of meer op zich zelf zijn blijven staan, indien niet in 1879 door Dr. Hermann Schubert in zijn leerboek »*Kalkül der abzählenden Geometrie*" een methode was uiteengezet, die een stelselmatige en geleidelijke behandeling van de vraagstukken der meetkunde van het aantal mogelijk maakte.

De grondgedachte van de methode van Schubert is deze: Iedere voorwaarde, die men aan een figuur van gegeven samenstelling kan opleggen, wordt voorgesteld door een bepaalde letter of symbool. Wordt aan de voorwaarde door een eindig aantal figuren voldaan, dan gebruikt men dezelfde letter om dat eindige aantal aan te duiden. Door een dergelijke opvatting geraakt men als vanzelf tot een eigenaardige rekening met symbolen, die tegelijk voorwaarden en getallen beteekenen. Het is daarbij voortdurend het streven, om iedere ingewikkelde voorwaarde door een stelkundige betrekking in voorwaarden van meer eenvoudig karakter uit te drukken.

Om daartoe te geraken is het onvermijdelijk het onderzoek aan te vangen met de elementen: het punt, de lijn, het vlak; en verder geleidelijk op te klimmen tot de beschouwing van meer saamgestelde figuren. Een hulpmiddel, dat dikwijls gewichtige diensten bewijst, is wat Schubert noemt: »das Princip von der Erhaltung der Anzahl". Dit beginsel is in den grond niets anders dan de stelkundige waarheid, dat

het aantal oplossingen van een stelsel vergelijkingen onafhankelijk is van de bijzondere waarden der coëfficienten.

Indien er dus, zoo zegt het bedoelde beginsel, in de aan een figuur F opgelegde voorwaarden sprake is van andere gegeven figuren F', dan zal het gezochte aantal der figuren F, dat de voorwaarde bevredigt, in het algemeen niet veranderen, zoo men omtrent de figuren F' bijzondere onderstellingen maakt, bij voorbeeld ze bijzondere standen geeft, of ze zeer bijzondere vormen laat aannemen.

Die eenvoudige regel, met eenig overleg toegepast, heeft reeds dikwijls de oplossing van ingewikkelde vraagstukken geleverd. Naast dit beginsel van het behoud van het aantal staan andere hulpmiddelen, die ons in staat stellen betrekkingen en vergelijkingen tusschen verschillende voorwaarden op te sporen. Dat zijn de *coïncidentieformules*, waarvan de eerste in 1864 door CHASLES is opgesteld. Indien een of ander stelsel van elementenparen is gegeven, dan zal het kunnen gebeuren, dat twee elementen van een paar elkaar onbepaald naderen of samenvallen. Het is dan de vraag om de voorwaarden, waaronder dergelijke coïncidenties tot stand komen, door een zoogenaamde coïncidentieformule uit te drukken in de grondvoorwaarden van het stelsel. SCHUBERT heeft voor al dergelijke stelsels de coïncidentieformules afgeleid, wier toepassing, in verband met het vermelde beginsel van het behoud van het aantal, gewoonlijk voldoende is om de meest verschillende *meetkundige getallen* te berekenen, waarvan de kennis bij vele onderzoekingen, zoowel in de analytische als in de synthetische meetkunde, wordt vereischt.

5e Vergadering op 19 Februari 1890.

Spreker: de Heer W. MANTEL.
Over de vergelijking van VILLARCEAU.

In 1872 werd door VILLARCEAU een verhandeling aangeboden, waarin hij een vergelijking meedeelde omtrent de

beweging van een stoffelijk punt of een stelsel punten. Deze vergelijking is voor één punt:

$$\tfrac{1}{2} m \frac{d^2 r^2}{d t^2} = mv^2 + (Xx + Yy + Zz).$$

Ofschoon deze vergelijking niet behoort te worden gerangschikt naast de voornaamste beginselen van de mechanica, zooals VILLARCEAU gemeend heeft, zoo kan zij in verschillende gevallen zeer goed worden toegepast. VILLARCEAU zelf heeft haar toegepast voor een bewijs van een formule van CLAUSIUS omtrent de levende kracht van een volkomen gas.

Wil men de vergelijking van VILLARCEAU toepassen op de beweging van een stoffelijk punt in een vlak, dan heeft men nog een tweede vergelijking noodig. Nemen wij aan, dat de kracht, die op het punt werkt, uit een krachtfunctie kan worden afgeleid, dan hebben wij uit het beginsel van het behoud van energie

$$\tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m v_0^2 = U - U_0.$$

De vergelijking van VILLARCEAU kan nu worden herleid tot:

$$\tfrac{1}{2} m \frac{d^2 r^2}{d t^2} = (m v_0^2 - 2 U_0) + 2 U + r \frac{\partial U}{\partial r},$$

waarvoor ook kan worden geschreven

$$mr \frac{d}{d t}\left(r \frac{d r}{d t}\right) = (m v_0^2 - 2 U_0)\, r + 2 U r + r^2 \frac{\partial U}{\partial r}.$$

Indien de radiale snelheid een functie van r is, kan er worden geintegreerd; dit geeft

$$\tfrac{1}{2} m \left(r \frac{d r}{d t}\right)^2 = (\tfrac{1}{2} m v_0^2 - U_0)\, r^2 + r^2 U - \tfrac{1}{2} m F(\theta).$$

Dat $\dfrac{d r}{d t}$ een functie van r is, moet zoodanig worden opgevat, dat uit alle mogelijke banen een bepaalde groep kan worden genomen, waarbij $\dfrac{d r}{d t}$ telkens op dezelfde wijze van den voerstraal afhangt.

Uit de laatste vergelijking volgt voor de krachtfunctie een uitdrukking van den vorm

$$U = \tfrac{1}{2} m \left[f(r) + \frac{F(\theta)}{r^2} \right].$$

Wordt de beweging onder zoodanige krachtfunctie gevraagd, dan behoeft men slechts de vergelijking van de energie op te schrijven:

$$\tfrac{1}{2} m \left[\left(\frac{d\,r}{d\,t}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\,\theta}{d\,t}\right)^2\right] = \tfrac{1}{2} m \left[f(r) + \frac{F(\theta)}{r^2}\right] + \tfrac{1}{2} m\, A,$$

en deze zoo te splitsen, dat $\frac{d\,r}{d\,t}$ in functie van r alleen is uitgedrukt, als volgt

$$\left(\frac{d\,r}{d\,t}\right)^2 = f(r) + A + \frac{B}{r^2}, \quad r^4 \left(\frac{d\,\theta}{d\,t}\right)^2 = F(\theta) - B,$$

om twee differentiaalvergelijkingen van de eerste orde te verkrijgen, welke de beweging bepalen.

De omstandigheid, dat de radiale snelheid in functie van r alleen, de perksnelheid in functie van θ alleen is uitgedrukt, geeft aan de banen een eigenaardig karakter. In 't algemeen zal de uitdrukking voor $\left(\frac{d\,r}{d\,t}\right)^2$ slechts positief zijn voor waarden van r, die tusschen bepaalde grenzen liggen; zoodoende worden een paar concentrische cirkels verkregen, waar de baan tusschen moet blijven. Evenzoo vindt men gemeenlijk een paar grenzen voor θ. De baan wordt zoodoende opgesloten in een veld, begrensd door twee cirkelbogen en twee stralen. Het stoffelijk punt kan op een willekeurige plaats binnen dat veld zijne beweging beginnen; het beweegt zich steeds naar een begrenzing; bereikt het die na verloop van een eindigen tijd, dan wordt het teruggeworpen naar een andere grens.

Deze soort van krachtfuncties omvat ook gevallen, die door aantrekking van een lichaam kunnen ontstaan, als die werkt in omgekeerde reden van het vierkant van den afstand. Men vindt die gevallen door de algemeene uitdrukking van onze krachtfunctie over te brengen in de differentiaalvergelijking van Laplace

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

nadat deze tot cilinder-coördinaten is herleid. Het blijkt, dat $F(\theta) = C \cos(2\,\theta + C')$ moet zijn; voor $f(r)$ kan men de potentiaal voor een willekeurig omwentelingslichaam invoeren.

Laten wij dezen term weg, dan hebben wij de eenvoudige krachtfunctie

$$U = \tfrac{1}{2} m \frac{a^4 \cos 2\theta}{r^2}.$$

De hierbij mogelijke banen zijn te vinden uit

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = A + \frac{B}{r^2}, \quad r^4 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -B + a^4 \cos 2\theta.$$

Naar gelang van de teekens en van de betrekkelijke grootte der standvastigen A en B zijn acht gevallen te onderscheiden. Zoo vindt men bij voorbeeld, als A en B positief zijn en $A = c^2$, $B = b^4$ wordt gesteld, als vergelijking voor de baan

$$\sin \theta = k \sin a m \frac{a^2 \sqrt{2}}{b^2} (x - x_0), \; k^2 = \frac{a^4 - b^4}{2 a^4},$$

als x een hulpveranderlijke is bepaald door

$$\frac{b^2}{c r} = Sh\, x,$$

en $\theta_0 = 0$ is genomen. Deze baan heeft een asymptoot; zij raakt oneindig veel malen aan de lijnen $\sin \theta = \pm k$; de voerstralen der raakpunten zijn zoodanig, dat de hulpgrootheid x daar waarden heeft, welke in een rekenkundige reeks klimmen. De hier behandelde methode kan op vele dynamische vraagstukken worden toegepast. Zij berust algemeen op de stelling, dat men aan de kanonieke vergelijkingen van Hamilton

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

voldoet, als men de bewegingsmomenten p in functie van de coördinaten q zoo kan uitdrukken, dat aan de vergelijking van energie wordt voldaan.

Deze stelling levert inderdaad een algemeene methode voor het oplossen van dynamische vraagstukken; want men bevindt, dat zij juist van toepassing is, als de integratie der differentiaalvergelijkingen gelukt; kan men de methode niet toepassen, dan zijn gewoonlijk, misschien altijd, ook alle andere hulpmiddelen der Wiskunde in gebreke. De methode levert zonder eenige kunstgreep van integraalrekening de differentiaalvergelijkingen van de eerste orde, en dat wel in

denzelfden vorm als het beginsel van het behoud van energie dit doet, in het geval dat er slechts een coördinaat q is; namelijk drukt zij uit, dat de bewegingsmomenten, evenals de energie, dadelijk in functie van de plaats worden gevonden.

1890—1891.

1ste Vergadering op 19 November 1890.

Spreker: Dr. D. J. Korteweg.
Elementaire voordracht over involutie.

Spreker meent, dat naast de zoo belangwekkende voordrachten in den laatsten tijd over synthetische meetkunde gehouden, wellicht behoefte bestaat aan meer elementaire, die als het ware ter inleiding kunnen dienen.

Van dit denkbeeld uitgaande koos spreker ter behandeling een der hoofdbeginselen der synthetische meetkunde, dat der *involutie.*

Uitgaande van de projectivische definitie der involutie geeft spreker eene nauwkeurige beschrijving der beide gevallen van de involutie van puntenrijen, namelijk met bestaanbare en onbestaanbare dubbelpunten.

Hierop gaat hij over tot het bewijs van het theorema, dat de wortels der vierkantsvergelijking

$$a + b\,x + c\,x^2 + \lambda\,(d + e\,x + f\,x^2) = 0,$$

als afstanden van een vast punt uitgezet, bij veranderende λ tot eene punteninvolutie aanleiding geven. Daaruit wordt afgeleid, dat een bundel kegelsneden door vier gegeven punten op een vaste rechte eene involutie afsnijdt, en nu als toepassing overgegaan tot de constructie der kegelsneden, als vier punten en één raaklijn, of drie punten en twee raaklijnen gegeven zijn.

Tevens wijst spreker er op, hoe dit theorema als een nieuwe stelkundige definitie der gewone of quadratische involutie kan worden opgevat, waaruit dan vanzelf de uitbreiding

van het begrip tot dat der involutie van den n^{en} graad volgt. De samenhang van die involutie met de theorie der krommen van den n^{en} graad wordt met een eenvoudig voorbeeld toegelicht.

Daarna komt aan de orde de involutie van stralenbundels. De studie van stralenbundels in involutie wordt met behulp van doorsneden tot die van puntenrijen in involutie teruggevoerd, en de beide gevallen ook hier uitvoerig toegelicht. Als voorbeelden wordt op de toegevoegde middellijnen van ellips en hyperbool gewezen.

Ten slotte wordt nog besproken de involutie van punten en raaklijnen op de kegelsnede.

Het theorema hetreffende de aanwezigheid van een centrum en een as van involutie wordt aangetoond, en ten slotte als toepassing een eenvoudige constructie gegeven van de asymptoten en assenrichtingen eener kegelsnede, als twee paar toegevoegde middellijnen in richting gegeven zijn.

2e Vergadering op 13 December 1890.

Spreker: Dr. P. Molenbroek.

Over de meetkundige voorstelling van imaginaire punten eener figuur in de ruimte.

1. In de theorie der quaternionen worden de rekenkundige en stelkundige negatieve getallen, de zoogenaamde skalare grootheden, als operatoren beschouwd.

Een rekenkundig getal, voor een vektor geplaatst of daarmede vermenigvuldigd, verandert slechts de lengte van dien vektor.

Een negatief getal daarentegen verandert niet alleen de lengte van den vektor, maar doet ook diens richting omkeeren.

2. Wanneer aan den vektor α de skalar x werkt, en aan den daardoor ontstanen vektor op nieuw de skalar x opereert, dan duidt men dit aan door $xx\alpha$ of $x^2\alpha$. De uitkomst kan

in den vorm $y\alpha$ geschreven worden; en men zegt, dat y de tweede macht van x en x de tweedemachtswortel uit y is.

De definitie voor dien tweedemachtswortel uit een getal luidt dus in teekens

$$\text{als } x^2\alpha = y\alpha, \text{ dan is } x\alpha = \sqrt{y}\alpha \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Symbolisch kan men hiervoor ook schrijven

$$\text{als } x^2 = y, \text{ dan is } x = \sqrt{y},$$

en de eerste vergelijking gaat hierdoor over in

$$\sqrt{y}\sqrt{y}\alpha = y\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Het is onmiddellijk in te zien, dat hetzij x een rekenkundig of een negatief getal is, y toch steeds een rekenkundig getal zijn moet, of in teekens:

$$\text{Als } x^2\alpha = y\alpha, \text{ dan is ook } (-x)^2\alpha = y\alpha,$$

en dus volgens (1)

$$\text{Als } x\alpha = \sqrt{y}\alpha, \text{ dan is ook } -x\alpha = \sqrt{y}\alpha.$$

De tweedemachtswortel uit een rekenkundig getal heeft derhalve twee waarden, een rekenkundige en een negatieve.

3. Om nu tot de beteekenis van den tweedemachtswortel uit een negatief getal te geraken nemen wij aan, dat daarbij evenzeer de vergelijking (2) bestaan blijft. Beschouwen wij voorloopig slechts den tweedemachtswortel uit de negatieve eenheid, dan stellen wij dus voorop, dat aan de vergelijking

$$\sqrt{-1}\,\sqrt{-1}\,\alpha = -\alpha. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

voldaan moet worden en trachten hiermede een meetkundige voorstelling te verbinden.

Daar de aanwending der operatie $\sqrt{-1}$ tweemalen achter elkander de richting van den vektor omkeeren moet, zoo kan het niet anders of de eenmalige aanwending moet den vektor een rechten hoek doen draaien. De lengte van den vektor kan daarbij niet veranderen, daar zij zulks ook nog niet na een herhaling der operatie doen mag.

Het vlak, waarin de draaiing plaats vindt, blijft onbepaald. Een willekeurig vlak kan daartoe niet gekozen worden, daar de herhaalde operatie dan niet tot $-\alpha$ zou behoeven te voeren. Maar verder kan niet één enkel vlak de voorkeur hebben boven de andere. Wij besluiten dus, dat alle vlakken, die den vektor α bevatten, gelijkelijk aan de operatie deelnemen, zoodat α gespleten wordt in een

complex van stralen, die te zamen een cirkel vormen om het beginpunt van α in een vlak, loodrecht op α met den straal $T\alpha$ beschreven. Wij zullen dit in het vervolg een *vektorcirkel* noemen en moeten nu nog nagaan, of wij werkelijk in overeenstemming met de vergelijking (3) blijven.

We laten dus aan den verkregen vektorcirkel opnieuw het symbool $\sqrt{-1}$ opereeren, of liever aan elk der stralen, die dien vektorcirkel vormen. Zij $OA = \alpha$ en OP een willekeurige straal van den vektorcirkel, zoodat $OP \perp OA$ en $T.OP = T.OA$. Door de aanwending van het symbool $\sqrt{-1}$ op OP ontstaat hieruit een vektorcirkel, welks vlak loodrecht op OP is, zoodat het OA bevat. Op gelijke wijze ontstaan uit alle stralen van den vektorcirkel $\sqrt{-1}\,\alpha$ vektorcirkels, welker vlakken OA bevatten. Door al deze vektorcirkels worden de beide vektoren OA en $-OA$ of OA' omhuld, en wij mogen dus in overeenstemming met de gewone wijze der voortbrenging van figuren door omhulling van vlakken, zeggen, dat $\sqrt{-1}\sqrt{-1}\,\alpha$ tot de beide vektoren OA en OA' voert. We zijn dus werkelijk door de aangenomene voorstelling van $\sqrt{-1}$. met de vergelijking (3) niet in tegenspraak gekomen.

Er blijft nog slechts over te verklaren, welke de oorzaak is, dat men zoowel tot OA' als OA komt. Wanneer wij het symbool $-\sqrt{-1}\,\alpha$ verklaren door de vergelijking

$$-\sqrt{-1}\,\alpha = \sqrt{-1}\,(-\alpha), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

dan blijkt onmiddellijk, dat de meetkundige voorstelling der grootheden $\sqrt{-1}\,\alpha$ en $-\sqrt{-1}\,\alpha$ overeenstemt, maar dan zal men ook de uitkomst der tweemalen herhaalde aanwending van $\sqrt{-1}$ kunnen beschouwen als een der vier volgende uitdrukkingen

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1}\,\alpha,\ \sqrt{-1}\,(-\sqrt{-1}\,\alpha),\ -\sqrt{-1}\,(\sqrt{-1}\,\alpha),\ \sqrt{-1}\,(-\sqrt{-1}\,\alpha),$$

en deze zijn identiek met α en $-\alpha$.

Wij moeten nu nog de beteekenis opsporen van de uitdrukking $\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$. Hieronder zullen wij verstaan het complex van stralen, dat ontstaat, als met elken straal van den vektorcirkel $\sqrt{-1}\,\beta$ bij den vektor α optelt. Is $OA = \alpha$, $AB = \beta$ en AP een willekeurige straal van den vektorcirkel $\sqrt{-1}\,\beta$, dan is dus OP een straal van de tot de

uitdrukking $\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$ behoorende figuur. Laat men nu A P den vektorcirkel $\sqrt{-1}\,\beta$ beschrijven, dan doorloopt O P het zijdelingsch oppervlak van een scheeven cirkelvormigen kegel. De gezamenlijke ribben van dien kegel vormen derhalve de voorstelling van de uitdrukking $\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$.

In het vervolg zullen wij deze figuur een *vektorkegel* noemen en verkrijgen dan de volgende bepaling:

De vektorkegel $\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$ is het complex der ribben van den cirkelvormigen kegel, welks top de oorsprong van α is, terwijl het grondvlak gevormd wordt door den cirkel, om het uiteinde van α in een vlak loodrecht op β met den straal $T\beta$ beschreven. Het is gemakkelijk in te zien, dat de beide vektorkegels $\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$ en $\alpha - \sqrt{-1}\,\beta$ of $\alpha + (-\sqrt{-1}\,\beta)$ identische figuren zijn.

Onder $\sqrt{-x}\,\alpha$ zullen wij verstaan $\sqrt{-1}\,(\sqrt{x}\,\alpha)$ en onder $x\,(\sqrt{-1}\,\alpha)$ hetzelfde als onder $\sqrt{-1}\,(x\,\alpha)$.

Het zal dan duidelijk zijn, dat de uitdrukking $(a + \sqrt{-b})\,\alpha$, waar a en b rekenkundige getallen zijn, de gezamenlijke ribben voorstelt van een rechten cirkelvormigen kegel, waarvan $a\alpha$ de as is, terwijl de straal van het grondvlak $\sqrt{b}\,T\alpha$ bedraagt.

5. De som en het verschil van twee vektorkegels kunnen wij door de vergelijking (5) bepalen:

$$\alpha + \sqrt{-1}\,\beta \pm (\alpha' + \sqrt{-1}\,\beta') = \alpha \pm \alpha' + \sqrt{-1}\,(\beta \pm \beta') \quad . \; (5)$$

6. Wij zagen in het vorige, dat het symbool $\sqrt{-1}$ een veelvoudige beteekenis heeft; hetzelfde is reeds door HAMILTON opgemerkt. De vergelijking

$$\rho = \sqrt{-1} \, . \, . \, , \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \; (6)$$

toch stelt volgens den grooten Engelschen wiskundige een eenheidsbol voor. Immers, indien men beide leden dier vergelijking tot de tweede macht verheft, dan wordt $\rho^2 = -1$ dus $T\rho = 1$, en dit is de vergelijking van een eenheidsbol. Keeren wij nu opnieuw tot de betrekklng (6) terug, dan blijkt hieruit, dat $\sqrt{-1}$ daarin alle mogelijke eenheidsvektoren voorstelt uit den vektorenoorsprong getrokken.

7. Wanneer men deze laatste beteekenis voor het symbool $\sqrt{-1}$ ook bij de verklaring van de uitdrukking $\sqrt{-1}\,\alpha$ laat gelden, dan blijkt uit de bepaling van het product van twee

vektoren onmiddellijk, dat in die uitdrukking, behalve de reeds in § 3 genoemde vektorcirkel, nog oneindig vele quaternionen opgesloten liggen, die alle tot noemer hebben den vektor $R\alpha$, terwijl de teller een willekeurige eenheidsvektor zijn kan.

8. De vergelijkingen

$$S\frac{\rho-\alpha}{\beta}=0,\quad T\frac{\rho-\alpha}{\beta}=1, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

stellen te zamen, zooals bekend is, een cirkel voor, namelijk de doorsnede van het plat vlak met een bol, die respectievelijk door de vergelijkingen (7) voorgesteld worden. Nu is echter algemeen

$$S^2 - V^2 = T^2,$$

zoodat uit de betrekkingen (7) volgt

$$\left(V\frac{\rho-\alpha}{\beta}\right)^2 = -1 \text{ of } V\frac{\rho-\alpha}{\beta} = \sqrt{-1},$$

en deze uitkomst bij de eerste der vergelijkingen (7) opgeteld, geeft

$$\frac{\rho-\alpha}{\beta} = \sqrt{-1} \text{ of } \rho = \alpha + \sqrt{-1}\,\beta.$$

We zien hieruit opnieuw, dat deze laatste uitdrukking kan beschouwd worden als een vektorvoorstelling van een cirkel, en dat men dan aan $\sqrt{-1}$ een veelvoudige waarde moet toekennen, namelijk die van alle in willekeurige vlakken gelegene rechte radialen.

9. Men pleegt te zeggen, dat de vergelijking

$$\rho = \alpha$$

een punt voorstelt, namelijk het uiteinde van den vektor α. Op dezelfde wijze zullen wij zeggen, dat de uitdrukking

$$\rho = \alpha + \sqrt{-1}\,\beta$$

een imaginair punt in de ruimte voorstelt; het is een cirkelomtrek met een bepaalden straal om een bepaald punt als middelpunt en in een bepaald vlak beschreven. In het volgende zullen wij kortheidshalve herhaaldelijk van de uitdrukkingen gebruik maken: middelpunt, straal en vlak van een imaginair punt, daaronder verstaande de gelijknamige grootheden van den cirkel, dien wij als dat imaginaire punt beschouwen.

10. De Vektorvergelijking eener rechte lijn kan geschreven worden in den vorm

$$\rho = \alpha + x\beta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Geeft men aan x in deze vergelijking achtereenvolgens alle reëele waarden, dan verkrijgt men de reëele punten der rechte lijn, welke door het punt α evenwijdig aan den vektor β loopt. Op dezelfde wijze zal men de imaginaire punten der rechte lijn verkrijgen door aan x alle mogelijke complexe waarden $x_1 + x_2 \sqrt{-1}$ toe te kennen. Daardoor wordt

$$\rho = \alpha + x_1 \beta + \sqrt{-1}\,(x_2 \beta),$$

en wij kunnen hieruit besluiten:

De middelpunten van alle imaginaire punten eener rechte liggen op deze zelve, terwijl hunne vlakken loodrecht op de richting der rechte staan en hunne stralen willekeurige lengte hebben.

11. Meer algemeen stellen wij door

$$\rho = x\alpha + y\beta + z\gamma \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

een willekeurigen vektor voor, die aan de voorwaarde

$$f(x, y, z) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

gebonden is, zoodat het uiteinde van ρ een oppervlak beschrijft.

Stelt men

$$x = x_1 + \sqrt{-1}\,x_2,\quad y = y_1 + \sqrt{-1}\,y_2,\quad z = z_1 + \sqrt{-1}\,z_2, \quad (11)$$

en nemen wij aan, dat $f(x, y, z)$ volgens TAYLOR's theorema ontwikkeld mag worden, dan volgt uit (10) door de invoering van (11) bij eene gebruikelijke symbolische schrijfwijze

$$\left.\begin{aligned} & f(x_1, y_1, z_1) - \frac{1}{2}\left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}\right)^2 f + \\ & \quad + \frac{1}{2.3.4}\left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}\right)^4 f + \ldots\ldots = 0, \\ & \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}\right) f - \\ & \quad - \frac{1}{1.2}\left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}\right)^3 f + \ldots\ldots = 0; \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

zoodat men voor x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 oneindig vele stellen waarden verkrijgen kan.

Overwegen wij nu, dat met behulp van (12) de vergelijking (9) overgaat in:

$$\rho = x_1 \alpha + y_1 \beta + z_1 \gamma + \sqrt{-1}\,(x_2 \alpha + y_2 \beta + z_2 \gamma),$$

en dat deze laatste een imaginair punt voorstelt, welks middelpunt den vektor $(x_1 \alpha + y_1 \beta + z_1 \gamma)$ heeft, terwijl het vlak van dat imaginaire punt loodrecht staat op den vektor $x_2 \alpha + y_2 \beta + z_2 \gamma$, en zijn straal eveneens door de lengte van dezen vektor aangegeven wordt, dan is het mogelijk met behulp van (12), de imaginaire punten van het oppervlak te vinden, waarvan (10) de skalarvergelijking is.

Een algemeene opmerking kan hier nog plaats vinden. Uit (12) blijkt onmiddellijk, dat indien aan deze beide vergelijkingen een stel waarden voor x_2, y_2, z_2, voldoet, ook tevens de waarden $-x_2$, $-y_2$, $-z_2$ zullen moeten voldoen, of met andere woorden: als een figuur een imaginair punt $\lambda + \sqrt{-1}\,\mu$ heeft, zal zij ook een imaginair punt $\lambda - \sqrt{-1}\,\mu$ moeten bezitten. Maar deze beide hebben dezelfde meetkundige voorstelling. Men kan dus besluiten, dat bij elke figuur een meetkundig voorhanden imaginair punt dubbel in rekening gebracht moet worden.

Het eenvoudigste geval is ongetwijfeld, dat f een lineaire functie is; wij kunnen in dat geval gemakkelijk de imaginaire punten van een plat vlak opsporen. De beide vergelijkingen (12) leveren dan

$$\left.\begin{array}{l} a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1 + d = 0 \\ \text{en} \\ a\,x_2 + b\,y_2 + c\,z_2 = 0. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

De eerste dezer vergelijkingen drukt uit, dat de imaginaire punten van een plat vlak hunne middelpunten in dat vlak zelf hebben moeten; terwijl volgens de tweede vergelijking de loodlijn tot het vlak van het imaginaire punt loodrecht staat op de normaal tot het gegeven vlak, zoodat die eerste loodlijn in het gegeven vlak liggen moet. De vlakken der imaginaire punten staan dus alle loodrecht op het gegeven vlak, maar zijn verder willekeurig. Ook de grootte van de stralen der imaginaire punten blijft willekeurig.

13. Nemen wij verder aan, dat f een quadratische functie is; eenvoudigheidshalve denken wij f te behooren bij eene ellipsoïde met de vergelijking

$$a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2 + d = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

De beide vergelijkingen (12) gaan dan over in

$$\left.\begin{array}{l} a x_1^2 + b y_1^2 + c z_1^2 + d = a x_2^2 + b y_2^2 + c z_2^2, \\ a x_1 x_2 + b y_1 y_2 + c z_1 z_2 = 0. \end{array}\right\} \quad \ldots (15)$$

De tweede dezer betrekkingen drukt uit, dat de richting van de middellijn der ellipsoïde, naar het middelpunt van het imaginaire punt gaande, tot die van de loodlijn op het vlak van het imaginaire punt toegevoegd is.

De eerste geeft allereerst te kennen, dat het middelpunt van een imaginair punt steeds buiten de ellipsoïde liggen moet, aangezien voor dit pnnt

$$a x_1^2 + b y_1^2 + c z_1^2 = - d + a x_2^2 + b y_2^2 + c z_2^2,$$

terwijl het tweede lid grooter is dan $-d$.

Maar verder drukt de eerste der vergelijkingen (15) nog uit, dat als men het middelpunt x_1, y_1, z_1 van het imaginaire punt als gegeven beschouwt, het punt, x_2, y_2, z_2 tot meetkundige plaats heeft een ellipsoïde gelijkvormig en coaxiaal met de gegevene ellipsoïde, terwijl de gelijkvormigheidsfactor bedraagt

$$\sqrt{\frac{a x_1^2 + b y_1^2 + c z_1^2 + d}{-d}}.$$

Deze vorm drukt echter volgens een bekende eigenschap der oppervlakken van den tweeden graad de standvastige verhouding uit van de lengte eener raaklijn uit het punt x_1, y_1, z_1, aan de gegeven ellipsoïde getrokken tot de helft der lengte der daaraan evenwijdige middellijn.

Bij gegeven x_1, y_1, z_1 is dus x_2, y_2, z_2 een punt der doorsnede van het middenvlak der ellipsoïde, dat tot den middelpuntsvektor van x_1, y_1, z_1 toegevoegd is met de boven beschrevene en met het gegeven oppervlak gelijkvormige ellipsoïde.

In het bijzonder geval van een bol leidt men hieruit af, dat de imaginaire punten zijn cirkels, welker middelpunten buiten den bol liggen, welker vlakken door het middelpunt van den bol gaan, en welker stralen gelijk zijn aan de lengte eener raaklijn uit het middelpunt van het imaginaire punt aan den bol getrokken.

14. Wanneer behalve de vergelijkingen (9) en (10) nog een andere

$$\Phi(x, y, z) = 0 \qquad (16)$$

gegeven is, zoodat Φ bij een ruimtekromme behoort, dan volgen uit (16) nog twee andere vergelijkingen analoog aan (12). De grootheden x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 moeten dan aan vier betrekkingen voldoen, zoodat men bij voorbeeld x_2, y_2, z_2 daartusschen elimineeren kan; en daardoor wordt als meetkundige plaats der middelpunten van alle imaginaire punten der ruimtekromme een oppervlak verkregen.

In het bijzondere geval, dat Φ lineair is, dat men dus met een vlakke ruimtekromme te doen heeft, worden de uit (16) afgeleide vergelijkingen van den vorm (13); zoodat de middelpunten der imaginaire punten alle in het vlak der kromme moeten liggen, en hunne vlakken loodrecht op het vlak der kromme staan moeten. Wanneer ook f lineair is, dan blijkt langs dezen weg opnieuw, hetgeen wij reeds in § 10 omtrent de imaginaire punten eener rechte lijn mededeelden.

Voor een cirkel vindt men, dat de cirkels der imaginaire punten in vlakken liggen, welke door het middelpnnt van den gegeven cirkel gaan, terwijl de straal dier cirkels gelijk is aan de lengte der raaklijn uit het middelpunt van het imaginaire punt aan den gegeven cirkel getrokken. Eindelijk moeten de middelpunten dier imaginaire punten buiten den cirkel gelegen zijn. Voor de ellips vindt men uitkomsten, volkomen overeenkomstig aan de in de vorige paragraaf voor de ellipsoïde afgeleide.

15. Ten slotte zullen wij met de nu verkregene begrippen nog kort het vraagstuk behandelen der doorsnijding van eene rechte lijn met een in haar vlak gelegen cirkel.

Het is gemakkelijk in te zien, dat een rechte lijn A B, indien zij twee reëele punten P en Q met een cirkel O gemeen heeft, nog niet bovendien îmaginaire punten daarmede gemeen hebben kan. Immers de middelpunten der imaginaire punten eener rechte moeten op die lijn zelf liggen, en opdat zij tevens tot den cirkel behooren, moeten zij op het buiten den cirkel gelegen deel der rechte lijn gelegen zijn.

Maar het vlak van een imaginair punt der rechte moet loodrecht op deze staan, kan dus nooit door het middelpunt

van cirkel O gaan, dus ook niet tevens tot een imaginair punt van dien cirkel behooren.

Wanneer A B geen reëele punten met cirkel O gemeen heeft, dan zal het voetpunt der loodlijn uit O op A B neergelaten het middelpunt van een imaginair punt zijn, dat zoowel tot de rechte lijn als tot den cirkel kan behooren; en dit moet het geval zijn, indien men voor den straal van het imaginaire punt kiest de lengte der raaklijn uit het zooeven genoemde voetpunt aan den cirkel O getrokken.

Volgens eene vroegere opmerking komt het zoo verkregen imaginaire punt bij beide lijnen tweemalen voor, en wij zien dus, dat deze inderdaad twee imaginaire punten gemeen hebben.

De voorzitter dankte den spreker voor zijne voordracht en stelde de leden in de gelegenheid om inlichtingen te vragen en opmerkingen te maken.

Prof. Korteweg maakte de opmerking, dat de ontwikkelde theorie hem onvolledig schijnt voor het geval, dat de vergelijking van het oppervlak imaginaire coëfficienten heeft, aangezien dan de imaginaire punten niet meer twee aan twee toegevoegd zijn. Hij oppert de gissing dat hieraan zou tegemoet te komen zijn door onderscheid te maken tusschen de beide *cycles*, waaruit een cirkel geacht kan worden te bestaan, naargelang men die zich in den eenen of in den anderen zin doorloopend denkt.

Overigens betuigde hij zijne instemming met sprekers denkbeeld om een imaginair punt in de ruimte door een cirkel voor te stellen. Langs geheel anderen weg was hij onlangs tot hetzelfde denkbeeld gekomen. Reeds meermalen was het hem in de gedachte gekomen, dat de natuurlijkste voorstellingswijze van imaginaire punten in het platte vlak zoude zijn, ze af te beelden door de beide reëele punten, tot welke zij een afstand nul bezitten. Dit denkbeeld tot de ruimte uitbreidende blijkt het, dat de reëele punten, die een afstand 0 bezitten tot het imaginaire punt $p + q\sqrt{-1}$, $r + \sqrt{-1}\, s$, $t + u\sqrt{-1}$ een cirkel vormen met p, r, t als middelpunt en $\sqrt{q^2 + s^2 + u^2}$ als straal, en welks vlak loodrecht staat op de vereenigingslijn van p, q, r met $p + q$, $r + s$, $t + u$.

Verder wees hij op een verhandeling van TARRY, waarop wij onlangs door Prof. SCHOUTE gewezen werden, waarin voor plat vlak en ruimte hiermede verwante voorstellingswijzen waren ingevoerd.

Hierop antwoorde Dr. MOLENBROEK, dat hij niet twijfelde, of deze cirkel was inderdaad identiek met de voorstellingswijze, waartoe hij geraakt was. Over het invoeren van de onderscheiding in *cycles* had hij meermalen gedacht, maar was er nog niet toe overgegaan, omdat hij ze moeilijk in zijn stelsel weet in te passen.

De heer PARAIRA meende, dat een consequente toepassing van het symbool $\sqrt{-1}$ op $\sqrt{-1}\,\alpha$ zou voeren tot den bol, om den oorsprong met $T\alpha$ als straal beschreven en vond het daarom vreemd, dat spreker daarvoor de omhullende van alle vlakken, waarin de vektorcirkels gelegen zijn, in de plaats stelde.

3e Vergadering op 22 Januari 1891.

Spreker: Dr. R. J. ESCHER.
Over de theorie der stelkundige functiën.

Spreker begon met te wijzen op de verhandeling van CAUCHY: Mémoire sur les intégrales définies, in 1814 gepubliceerd, welke het uitgangspunt vormt van de richting, die hij, op het gebied van de zuivere analyse, gedurende een groot aantal jaren heeft ingeslagen.

Behalve de eigenaardige methode, die hij daarbij toepast op de waardebepaling van bepaalde integralen, is deze verhandeling nog in een ander opzicht merkwaardig. Zij bevat een poging tot het verklaren en doen verdwijnen van moeilijkheden en tegenstrijdigheden, die gerezen waren, wanneer men bij dubbelintegralen de orde van integratie verwisselt. Terecht schrijft hij de reden van die tegenstrijdigheden toe aan het feit, dat de functie onder het integraalteeken dan onbepaald wordt voor een van de grenzen of voor een waarde,

binnen die grenzen gelegen; maar zijn theorie van de bijzondere integralen, die alsdan de correctie aangeven, noodig om van de eene orde van integratie tot de andere te kunnen overgaan, is in beginsel niet juist, hoewel zij sedert door de wiskundigen algemeen is aangenomen en in de leerboeken is overgenomen.

De reden toch van de verkregen tegenstrijdigheden is niet, zooals CAUCHY aanneemt, dat de integraal telkens een bepaalde waarde aanneemt, die echter op een bepaalde wijze met den integratieweg verandert; maar komt daarvan, dat de integraal in dezelfde punten onbepaald wordt en geen beteekenis heeft, waarbij dit het geval is met de functie onder het integraalteeken. Afgezien van deze bijzondere waarden, waarvoor de integraal geen enkele beteekenis heeft, leidt een rechtstreeksche uitvoering der integratie, in tegenstelling met de zienswijze van CAUCHY, tot het feit, dat men ten alle tijde de orde van integratie mag verwisselen, ook voor de onmiddellijke omgeving van die punten, alwaar de functie onbepaald wordt. Er doet zich echter voor die omgeving een merkwaardig geval van continuiteit voor, namelijk dat hier bij sommige integratiewegen met een onbegrensd kleine aangroeiing van den weg, een eindige aangroeiing van de integraal overeenkomt.

Deze beschouwingen vormen den brug, waardoor men van deze theorie van CAUCHY tot zijn latere en betere theorie kan overgaan. Zij worden toegelicht bij de integraal

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 \, bg\, tg \dfrac{y}{x}}{\partial y \, \partial x} \, dx \, dy \,,$$

en meetkundig aanschouwelijk voorgesteld.

De eigenschap, dat men bij dubbelintegralen de orde van integratie mag verwisselen, speelt een voorname rol bij het bewijs, dat CAUCHY in 1839 gaf voor het gewichtige kenmerk van convergentie, dat hij in 1837 in een brief aan CORIOLIS aldus formuleerde.

Een willekeurige functie van een complexe veranderlijke x kan altijd ontwikkeld worden volgens de reeks van MACLAURIN, zoolang de modulus van x een waarde behoudt,

die kleiner is dan die, waarvoor de functie of haar eerste afgeleide oneindig of discontinue wordt.

In de Comptes Rendus van 1843 heeft spreker vermeld gevonden, dat LAURENT, een kapitein van de genie, door een uitbreiding te geven aan de grondslagen, waarop het bewijs van CAUCHY steunt, de aanleiding vond tot de ontdekking van zijn nieuwe reeks.

Spreker heeft het bewijs van LAURENT zelf nergens kunnen vinden; maar dezelfde grondgedachte heeft hem geleid tot een ander bewijs van de reeks van LAURENT, dat in elk geval afwijkt van de bewijzen van LAURENT en CAUCHY in 1843 gegeven, en dat voor zoover hij weet oorspronkelijk is.

Het jaar 1846 vormt een keerpunt in de wetenschappelijke loopbaan van CAUCHY. Hij vond den kern van eene nieuwe theorie, van grooteren omvang, die hij publiceerde in de verhandelingen: »Sur les intégrales, qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée" en »Mémoire sur les intégrales dans lesquelles la fonction sous le signe $\int$ change brusquement de valeur. Comptes Rendus, XXIII, 1846."

Het bewijs van de eigenschappen, die hij hier aangeeft, komt, in beginsel, in de tegenwoordige leerboeken voor.

4e Vergadering op 21 Februari 1891.

Spreker: Dr. R. J. ESCHER.
Vervolg van de theorie der stelkundige functiën.

Spreker gaf een kort overzicht van de ontwikkeling van de theorie der stelkundige functiën en wees aan, hoe CAUCHY in zijn verhandeling: „Considérations nouvelles sur les intégrales définies, qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée, C. R., XXIII, 1846" aangeeft, hoe een moeielijkheid kan worden opgelost, veroorzaakt door de wijze, waarop JACOBI de studie van de ABELsche functiën heeft ingeleid, en waarop spreker in zijn dissertatie gewezen heeft.

Vervolgens geeft hij een uiteenzetting van de methode, waarop PUISEUX de verwisseling van de verschillende takken eener willekeurige stelkundige functie in de vertakkingspunten heeft bepaald, en waarvan men de beschrijving vindt in de verhandeling; „Recherches sur les fonctions algébriques, Journal de Liouville, XV, 1850."

Spreker treedt vervolgens in een discussie van de voorwaarden, waaraan voldaan moet worden, opdat de cyclische verwisselingen van de takken om de vertakkingspunten en de reeks ontwikkelingen in die punten, volgens gebroken machten van de veranderlijke, van kracht blijven. Hij komt hierbij tot de slotsom, dat het noodig en voldoende is, dat er tusschen de nulpunten, polen en vertakkingspunten eindige afstanden bestaan, en stelt voor de bepaling eener stelkundige functie in dien zin te wijzigen.

Vervolgens wordt aangegeven, hoe dezelfde uitkomsten door rechstreeksche grensbepaling kunnen worden afgeleid, en op welke wijze de discontinuiteit in de vertakkingspunten het gevolg is van het feit, dat het eerste differentiaalquotient in die punten op een begrensd aantal wijzen onbepaald wordt, en waaruit de door PUISEUX gevonden wet van de cyclische verwisseling der takken onmiddellijk volgt. Spreker leidt hieruit de volgende eigenschap af:

Wanneer een functie op een zoodanige wijze discontinue wordt, dat haar eerste differentiaalquotienten de wortels zijn van eene binomische vergelijking, en de functie, binnen een eindig gebied om het vertakkingspunt, eindig en continue blijft, worden de verwisselingen van de verschillende takken van die functie binnen dat gebied door die van de binomische vergelijking bepaald.

De methode van rechtstreeksche grensbepaling blijft ook van kracht voor het geval, dat behalve $\frac{\delta f}{\delta y}$ ook nog $\frac{\delta f}{\delta x} = 0$ wordt.

Aan eenige voorbeelden laat spreker zien, op welke wijze de toepassing van de methode dan eenige wijziging ondergaat, maar toch haar doel bereikt, langs een korteren weg dan volgens de methode van PUISEUX, en vooral langs een

veel korteren weg dan volgens de methode later door HAMBURGER gevonden en door KÖNIGSBERGER in zijn »Théorie der Elliptischen Functionen" overgenomen.

5e Vergadering op 21 Maart 1891.

Sprekers de HH: Dr. G. SCHOUTEN, A. N. GODEFROY en Prof. Dr. D. J. KORTEWEG.

Het theorema van FOURIER bewezen volgens de methode van CAUCHY door G. SCHOUTEN.

Wanneer een functie van x ondersteld wordt ontwikkeld te kunnen worden in een reeks, wier termen de cosinussen en de sinussen van de opvolgende veelvouden van x bevatten, zoodat

$$f(x) = \tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots\ldots b_n \cos nx + \ldots\ldots$$
$$+ a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots\ldots a_n \sin nx + \ldots\ldots,$$

dan vindt men voor de coëfficienten a en b

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \sin m\alpha \, d\alpha,$$
$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \cos m\alpha \, d\alpha.$$

DIRICHLET, RIEMANN en anderen hebben onderzocht, onder welke voorwaarden deze ontwikkeling plaats heeft.

De gang bij dit onderzoek gevolgd bestaat hierin, dat de som S_{2n+1} van de eerste $2n+1$ termen van de reeks wordt gebracht onder den vorm

$$S_{2n+1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) d\alpha \left\{ \tfrac{1}{2} + \cos(\alpha - x) + \cos 2(\alpha - x) + \ldots + \cos n(\alpha - x) \right\} =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \frac{\sin (2n+1) \frac{\alpha - x}{2}}{2 \sin \frac{\alpha - x}{2}} d\alpha,$$

en de waarde van deze integraal bepaald wordt voor 't geval, dat n oneindig groot wordt.

De uitkomst is

$$\begin{aligned} lim.\ S_{2n+1} &= \tfrac{1}{2}\,(f(x+0) + f(x-0)) \text{ voor } \pi > x > -\pi, \\ &= \tfrac{1}{2}\,(f(\pi - 0) + f(-\pi + 0)) \text{ voor } x = \pm \pi. \end{aligned}$$

Spreker zou ditzelfde bewijzen door toepassing van de theorie der Residuen van CAUCHY, en stelde daartoe bovenstaande reeksontwikkeling onder de volgende gedaante:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\, e^{n(\alpha - x)i}\, d\alpha \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

Nadat spreker het theorema van CAUCHY had afgeleid, ging hij over tot het maken van twee toepassingen.

Wordt $\dfrac{f(z)}{z-c}$ geintegreerd langs een gesloten kromme, waarbinnen het punt c gelegen is, en is $f(z)$ eenwaardig en eindig binnen die kromme, terwijl $f(c)$ niet nul is, dan geeft het theorema van CAUCHY:

$$\int \frac{f(z)}{z-c}\, dz = lim. \int_0^{2\pi} \frac{f(c + \rho\, e^{i\theta})\, \rho\, i\, e^{i\theta}\, d\theta}{\rho\, e^{i\theta}} = 2\,\pi\, i\, f(c).$$

Wordt ten tweede $\dfrac{f(z)}{e^{2\pi i z} - 1}$ geintegreerd langs een cirkel, om den oorsprong als middelpunt beschreven met oneindig grooten straal, dan geeft het theorema, aangezien $e^{2\pi i z} - 1 = 0$ is voor $z = n$, n een willekeurig geheel getal zijnde,

$$\int \frac{f(z)}{e^{2\pi i z} - 1}\, dz = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int \frac{f(z)}{z-n}\, dz\, \frac{z-n}{e^{2\pi i z} - 1} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(n)$$

in de onderstelling, dat $f(z)$ eindig en eenwaardig is en voor $z = n$ niet nul, en $\dfrac{f(z)}{e^{2\pi i z} - 1}$ alleen voor $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$ oneindig groot wordt.

Met het oog op de te bewijzen stelling (A) nemen we nu voor $f(z)$ de integraal

$$\int_a^b f(\xi)\, e^{\pm z(\xi - x)i}\, d\xi,$$

waar a, b, x bestaanbaar zijn. Wordt nu $(\xi - x)^2 < (2\pi)^2$

ondersteld, dan zal $\frac{f(z)}{e^{2\pi i z}-1}$ alleen oneindig groot zijn voor $z=0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$

We vinden dus

$$J=\int d z \int_a^b \frac{f(\xi) e^{\pm z(\xi-x) i} d \xi}{e^{2\pi i z}-1}=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(\xi) e^{n(\xi-x) i},$$

onder de voorwaarde

volstrekte waarde van $\xi - x < 2\pi$.

Nu kunnen we de waarde van J nog op een andere wijze vinden.

Het geval, dat x buiten de grenzen van de bepaalde integraal ligt, sluiten we uit en onderscheiden daarom slechts drie gevallen

$$x=a, \quad x=b, \quad a<x<b.$$

Eerste geval. $x=a$.

We stellen $z=r e^{i\theta}$, $\lim r=\infty$ en nemen het bovenste teeken; dan is

$$J=\int_0^{2\pi} i z d \theta \int_x^b \frac{f(\xi) e^{(\xi-x) i r(\cos\theta+i\sin\theta)}}{e^{2\pi i r(\cos\theta+i\sin\theta)}-1} d \xi=$$

$$=\int_0^{2\pi} i z d \theta \int_x^b \frac{f(\xi) e^{(\xi-x) r i \cos\theta} d \xi}{e^{2\pi i r\cos\theta} e^{-r\sin\theta(2\pi-(\xi-x))}-e^{r(\xi-x)\sin\theta}}.$$

Uit dezen vorm blijkt, dat zoolang $\xi - x$ kleiner dan 2π en grooter dan nul blijft, de waarde van J nul zal zijn, aangezien ieder element van de bepaalde integraal nul is. Alleen voor $\xi - x = 0$ en $\pi > \theta > 0$ kan J een waarde verkrijgen.

Wij behoeven dus de integratie ten opzichte van θ slechts uit te strekken van $\theta=0$ tot $\theta=\pi$, en die ten opzichte van ξ van x tot $x+\varepsilon$, waar ε zóó dicht bij 0 kan genomen worden als men wil. Bij gevolg

$$J=\int_0^{\pi} i z d \theta \int_x^{x+\varepsilon} - f(\xi) e^{z i(\xi-x)} d \xi.$$

Stellen we nu $\xi - x = \nu$, dan is

$$J=\int_0^{\pi} i z d \theta \int_0^{\varepsilon} - f(x+\nu) e^{z i \nu} d \nu,$$

$$=\int_0^{\pi} d \theta \int_0^{\varepsilon} - f(x+\nu) i z e^{i z \nu} d \nu,$$

$$=\int_0^{\pi} d \theta \,. - f(x+0)\left(e^{i z \nu}\right)_0^{\varepsilon}$$

Maar $e^{izv} = e^{vr(i\cos\theta - \sin\theta)}$ is voor $v > 0$ gelijk nul, omdat $r \sin\theta$ oneindig groot is langs den halven cirkel. Wij vinden dus

$$J = \pi f(x+0), \quad b - x < 2\pi.$$

Tweede geval $x = b$.

Wij stellen nu weer $z = r e^{i\theta}$, maar nemen nu van het dubbele teeken het onderste. Op volmaakt dezelfde wijze vindt men nu

$$J = \pi f(x-0).$$

Derde geval $a < x < b$.

Ligt x tusschen a en b, dan kunnen wij J splitsen in twee deelen, waarvan de eerste tot grenzen van de bepaalde integraal heeft a en x, het tweede x en b. Dan is

$$J = \pi\,(f(x-0) + f(x+0)).$$

In dit geval kan $b - a = 2\pi$ genomen worden. Dus

$$J = \pi\,(f(x-0) + f(x+0)) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi)\, e^{n(\xi - x)i}\, d\xi;$$

waarmede het theorema van Fourier onder dezen vorm is bewezen voor $-\pi < x < \pi$.

Voor $x = -\pi$ schrijven wij

$$J = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_{-\pi}^{0} f(\xi)\, e^{n(\xi - x)i}\, d\xi + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_{0}^{\pi} f(\xi)\, e^{n(\xi - x)i}\, d\xi.$$

De eerste som is voor $x = -\pi$ gelijk $\pi f(-\pi + 0)$; in de tweede som stellen wij $\xi = \alpha + 2\pi$, dan gaat zij over in

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_{-2\pi}^{-\pi} f(\alpha + 2\pi)\, e^{n(\alpha - x)i}\, d\alpha = \pi f(-\pi + 2\pi - 0) = \pi f(\pi - 0);$$

zoodat

$$J = \pi\,(f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)), \text{ voor } x = -\pi.$$

Op gelijke wijze vindt men dezelfde waarde van J, als $x = +\pi$ is, zoodat

$$\pi\,(f(\pi - 0) + f(-\pi + 0)) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi)\, e^{n(\xi - x)i}\, d\xi,$$

voor $x = +\pi$ en $x = -\pi$.

Hierna liet spreker zien, hoe de eigenlijke vorm, waaronder het theorema van FOURIER voorkomt, uit het gevondene wordt afgeleid.

Nemen we kortheidshalve $f(z)$ doorloopend aan, zoodat wij gevonden hebben

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi)\, e^{n(\xi - x)i}\, d\xi.$$

Het spreekt van zelve, dat als $f(x)$ vervangen wordt door $f(kx)$, waar k een willekeurig getal is, $f(\xi)$ door $f(k\xi)$ wordt vervangen. Wij nemen voor k $\frac{c}{\pi}$ dus

$$f\left(\frac{c}{\pi} x\right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{c}{\pi} \xi\right) e^{n(\xi - x)i}\, d\xi$$

of $\frac{c}{\pi} x = z$ stellende, waaruit $-c < z < c$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{c}{\pi} \xi\right) e^{n(\xi - \frac{\pi}{c} z)i}\, d\xi.$$

Of eindelijk $\frac{c}{\pi} \xi = \zeta$ stellende:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{c} \int_{-c}^{+c} f(\zeta)\, e^{\frac{\pi}{c} n(\zeta - z)i}\, d\zeta.$$

Laten we nu c onbepaald aangroeien, dan zal $n \frac{\pi}{c}$ voor de opvolgende waarden van n een doorloopende veranderlijke worden, waarvan de differentiaal $\frac{\pi}{c}$ is. Stellen we dus

$$n \frac{\pi}{c} = \lambda,$$

dus

$$\frac{\pi}{c} = d\lambda,$$

dan gaat bovengenoemde vorm over in

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{\lambda(\xi - z)i}\, d\xi,$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, d\xi\, (\cos \lambda\, (\xi - z) + i \sin \lambda\, (\xi - z)),$$

of wat hetzelfde is

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos \lambda\, (\alpha - x)\, d\alpha,$$

welke geldig is voor elke eindige waarde van x. Is $f(x)$ ondoorloopend, dan moet ze vervangen worden door

$$\tfrac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0)).$$

Spreker eindigde met te wijzen op het groote belang van het theorema van FOURIER voor het ontwikkelen van functies in reeksen, voor het integreeren van gedeeltelijke differentiaalvergelijkingen en voor het bepalen van de waarde van integralen. Hij besloot met de volgende afleiding van den continuiteits-factor van DIRICHLET.

Stel

$$f(x) = 1 \text{ voor } x^2 < 1,$$
$$= 0 \text{ voor } x^2 > 1,$$

dus

$$= \tfrac{1}{2} \text{ voor } x^2 = 1;$$

dan geeft het theorema

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} d\lambda \int_{-1}^{+1} \cos \lambda\, (\alpha - x)\, d\alpha,$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} d\lambda \left(\frac{\sin \lambda\, (\alpha - x)}{\lambda}\right)_{\alpha=-1}^{\alpha=+1},$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} d\lambda \left(\frac{\sin \lambda\, (1 - x) - \sin \lambda\, (-1 - x)}{\lambda}\right),$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} d\lambda\, \frac{2 \sin \lambda .\, \cos \lambda\, x}{\lambda}.$$

Zoodat

$$\frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin \lambda .\, \cos \lambda x}{\lambda} d\lambda = \begin{matrix} 1 \\ \tfrac{1}{2} \\ 0 \end{matrix} \text{ voor } x^2 \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 1.$$

Het lid A. N. GODEFROY behandelde eene kromme lijn met zes knooppunten, waarvan de vergelijking op rechthoekige coördinaten is

$$x = \cos \Phi\, (R \cos^2 \Phi + r - R)$$

en

$$y = \sin \Phi \, (R + r - R \sin^2 \Phi).$$

Voor $R = r$ gaat de kromme over in de meetkundige plaats der tangenten van eene *conchoide* (uit den cirkel afgeleid), reeds in November 1876 door spreker behandeld, en toen genoemd *Bipodaire*. (Verg. N. Archief, deel 12, 1886, bladz. 32, fig. 15). Hij trad in eene nadere beschouwing van de onderscheidene gedaanten dezer kromme lijn, naar de verhouding van de stralen r en R.

Voor $R =$ of $< \frac{1}{2} r$, zonder buigpunten, noch knoopen;
Voor $R > \frac{1}{2} r$, vier buigpunten tot $R = r$, twee keerpunten;
Voor $R > r$ tot $R = 2\, r$, twee knooppunten, $x = 0, y = + \sqrt{r\, R}$;
Voor $R > 2\, r$, zes knooppunten, waarvan twee op de Y-as als boven. De overige vier op een afstand van $r \sqrt{2}$ uit het centrum O.

Omtrent het geval van $R = r$ (twee keerpunten) vergelijke men de oplossing van vraagstuk 60, 3^e deel der Wisk. Opgaven, 1887, door Prof. NEUBERG te Luik).

De hoogst eenvoudige constructie der *Normaal* aan eenig punt der kromme werd met teekeningen toegelicht, en door berekening van het differentiaalquotient $\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)$ bevestigd.

(Een bijzonder geval ($R = 3\, r$) komt voor in vraagstuk 158, Wisk. opgaven, 3^e deel, 1889, door Prof. J. C. KAPTEYN te Groningen). De waarden van $\frac{d\,y}{d\,x}$ werden onderzocht, en de constructie der knooppunten daaruit afgeleid.

$$x = \cos \Phi . \, (R \cos^2 \Phi - R + r)$$
$$y = \sin \Phi . \, (R + r - R \sin^2 \Phi)$$
$$z = R \, (2 \cos^2 \Phi - 1)$$

Aanmerking. De meetkundige plaats van het uiteinde der Normaal is eene vierde-machts-kromme met vier gelijke lussen; het centrum als gemeenschappelijke knoop.

Voor $r = 0$ gaat de kromme over in eene soortgelijke lijn met vier gelijke lussen diagonaalsgewijze geplaatst. De polaire vergelijking is

$$z = R \sin \Phi . \cos \Phi .$$

Het gedrag der plooipunten met bijbehoorende spinodale en connodale lijnen bij de vervorming door een kegelpunt heen, door Prof. D. J. KORTEWEG.

Spreker gaat bij de beschrijving van dit gedrag uit van den toestand, als het kegelpunt juist aanwezig is. Is alsdan $H_2 + H_3 + H_4 + \ldots = 0$ de vergelijking van het oppervlak met het kegelpunt als oorsprong, dan gaan er door het kegelpunt zes takken der spinodale lijn, welke in het kegelpunt tot raaklijnen bezitten de zes lijnen $H_2 = 0$, $H_3 = 0$.

Van deze takken kunnen er dus *zes*, *vier*, *twee* of *nul* bestaanbaar zijn. Iedere tak loopt door het kegelpunt heen over beide bladen van het oppervlak. Ieder blad wordt daardoor in even zoovele segmenten verdeeld als er bestaanbare takken zijn der spinodale lijn. Deze segmenten zijn beurtelings positief en negatief gekromd, de overeenkomstige segmenten op beide bladen *tegengesteld.*

Iedere bestaanbare tak der spinodale lijn is vergezeld van een bestaanbaren tak der connodale lijn. In het kegelpunt raken beide takken elkander. Zij gaan aldaar *niet* door elkander heen; waarvan het gevolg is, dat de tak der connodale lijn op beide bladen op gelijksoortig gekromd gebied voortloopt.

De beteekenis van zulk een tak der connodale lijn is *deze*: dat zij de meetkundige plaats is der punten, wier raakvlakken door het kegelpunt gaan, of, wil men liever, de contactlijn van het oppervlak met den omhullenden kegel, die het kegelpunt tot top heeft. Dewijl ieder vlak, gaande door het kegelpunt, als een raakvlak moet worden opgevat, is het duidelijk, dat zulk eene lijn als eene connodale lijn moet worden beschouwd, waarvan de ééne connode voortdurend in het kegelpunt blijft, de andere langs het oppervlak voortloopt.

Spreker gaat daarop over tot den invloed, dien eene geringe vervorming van het kegelpunt op den loop der spinodale en connodale lijnen heeft. Bij *scheiding* der beide in het kegelpunt samenkomende bladen breidt het positief gekromde deel zich uit ten koste van het negatief gekromde. De takken der connodale lijn, welke op negatief gekromd gebied verliepen, verdwijnen spoorloos; de anderen verdubbelen zich. Eén der

beide door verdubbeling ontstane takken raakt de spinodale lijn in een plooipunt, de andere tak loopt, zoover beiden zonder nadere kennis van de gedaante van het oppervlak op eindigen afstand vervolgd kunnen worden, met deze ongeveer evenwijdig. De zoo beschreven figuur vertoont zich natuurlijk op beide bladen. Er ontstaan dus bij scheiding dubbel zooveel bestaanbare plooipunten als er bestaanbare takken der connodale lijn op positief gekromd gebied verliepen, toen het kegelpunt aanwezig was. Daar na de scheiding alle connodale lijnen zich op positief gekromd gebied bevinden, zijn de plooipunten allen van de eerste soort. Van de door verdubbeling ontstane takken bezitten die met plooipunt connoden, welke beiden op hetzelfde blad gelegen zijn; bij de anderen met deze evenwijdig verloopenden, liggen de connoden op verschillende bladen.

Bij *verbinding* doen zich tegengestelde verschijnselen voor, die gemakkelijk te gissen zijn.

OVER BEWEGINGSMOMENTEN.

EEN METHODE IN DYNAMICA.

DOOR

W. MANTEL.

---

1. Onder de vraagstukken, welke in de dynamica worden behandeld, acht men de voornaamste die, waarbij de beweging van een stelsel stoffelijke punten wordt gevraagd, als op het stelsel krachten werken, die afgeleid kunnen worden uit een krachtfunctie. Door LAGRANGE zijn de differentiaalvergelijkingen opgemaakt voor de beweging van zulk een stelsel voor het geval, dat de stand kan worden bepaald door een eindig aantal meetkundige grootheden, *coördinaten*, die van elkander onafhankelijk zijn. Door HAMILTON zijn deze vergelijkingen in den eenvoudigsten, zoogenaamd kanonieken vorm gebracht. Zijn de coördinaten q_1, q_2, ..., dan kan het arbeidsvermogen van beweging worden uitgedrukt door een functie T van deze coördinaten en van hare fluxies, de *snelheden* $\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt}$, $\dot{q}_2 = \frac{dq_2}{dt}$, ... De gedeeltelijke afgeleiden van deze functie ten aanzien van de snelheden noemt men *bewegingsmomenten;* zij zijn $p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}$, $p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}$, ... Het geheele ar- arbeidsvermogen kan ook worden uitgedrukt door een functie H van de coördinaten en de bewegingsmomenten; in deze functie treden de snelheden niet meer op.

De kanonieke vergelijkingen van HAMILTON zijn

$$\frac{d p_1}{d t} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{d p_2}{d t} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \quad \ldots\ldots \qquad 1)$$

$$\frac{d q_1}{d t} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{d q_2}{d t} = \frac{\partial H}{\partial p_2} \ldots\ldots\ldots \qquad 2)$$

Het bewijs van deze vergelijkingen vindt men o. a. zeer duidelijk in een verhandeling van Prof. VAN GEER in het *Nieuw Archief*, deel VII, blz. 164 en vlg.

2. Uit de kanonieke vergelijkingen volgt

$$\left[\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{d p_1}{d t} + \frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{d q_1}{d t}\right] + \left[\frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{d p_2}{d t} + \frac{\partial H}{\partial q_2}\frac{d q_2}{d t}\right] + \ldots = 0.$$

Deze vergelijking kan worden geïntegreerd, omdat t niet staat in de functie H; men vindt

$$H(q_1, q_2, \ldots p_1, p_2 \ldots) = \varepsilon. \ldots\ldots\ldots \qquad 3)$$

Hierdoor wordt uitgedrukt, dat het arbeidsvermogen onveranderlijk is. Men heeft alzoo één eerste integraal van het stelsel 1), 2) gevonden; indien er slechts een coördinaat is, dan is deze voldoende om de beweging te leeren kennen; uit 2) en 3) volgt dan nog, door p te verwijderen, een betrekking, die veroorlooft om t uit te drukken in q door middel van een quadratuur.

Zijn er verscheidene coördinaten, dan gelukt de oplossing somtijds door splitsing van 3) in eenige andere. Men heeft namelijk deze stelling:

Als eenige bewegingsmomenten zoo in de overeenkomstige coördinaten kunnen worden uitgedrukt, dat daardoor het arbeidsvermogen onafhankelijk wordt van die coördinaten, en als op eenig tijdstip aan de zoo gestelde betrekkingen wordt voldaan, dan gelden deze ook voortdurend.

Het bewijs is zeer eenvoudig. Er wordt ondersteld, dat door het aannemen van eenige, bijvoorbeeld twee vergelijkingen $p_1 = f(q_1)$, $p_2 = F(q_2)$, uit de functie H de coördinaten q_1 en q_2 wegvallen, zoodat

$$H(q_1, q_2, q_3 \ldots, f(q_1), f(q_2), p_3 \ldots)$$

onafhankelijk is van q_1 en q_2. Daaruit volgt

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial p_1} f'(q_1) = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial q_2} + \frac{\partial H}{\partial p_2} F'(q_2) = 0. \;.\;.\; 4)$$

Brengt men hierin de waarden van $\frac{\partial H}{\partial p_1}$ en $\frac{\partial H}{\partial p_2}$ uit 2) over, dan vindt men

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} + f'(q_1)\frac{d q_1}{d t} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial q_2} + F'(q_2)\frac{d q_2}{d t} = 0,$$

of

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} + \frac{d p_1}{d t} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial q_2} + \frac{d p_2}{d t} = 0.$$

De eerste twee der vergelijkingen 1) zijn dus voldaan, zoodat de vergelijkingen $p_1 = f(q_1)$, $p_2 = F(q_2)$ als eerste integralen van het stelsel 1), 2) zijn aan te merken. Zij kunnen zijn bijzondere integralen of algemeene, zoodat zij somtijds voor alle mogelijke bewegingen van het stelsel gelden, somtijds slechts voor enkele.

De vergelijkingen 4) kunnen identiteiten zijn of integraalvergelijkingen van het stelsel 1), 2). Alleen het eerste geval behoeft te worden beschouwd, omdat het alleen dan mogelijk is de integralen $p_1 = f(q_1)$, $p_2 = F(q_2)$ zonder berekening aan te geven.

Indien men alle bewegingsmomenten op één na op deze wijze in de overeenkomstige coördinaten kan uitdrukken, dan volgt uit 3), dat ook het laatste bewegingsmoment een functie is van de laatste coördinaat. Het vraagstuk is dan teruggebracht tot het integreeren van het stelsel 2), waaruit alle p kunnen worden verwijderd. Deze integratie levert geen wezenlijke bezwaren, omdat zij steeds tot quadraturen is te brengen.

3. De bewezen stelling levert een methode op voor het oplossen van dynamische vraagstukken. Men moet daarbij beginnen met het berekenen van de functie H, en beproeven, of elke p zoo in zijne q is uit te drukken, dat de q uit H wegvalt; gelukt dit, en kan men zooveel willekeurige standvastigen opnemen, dat het mogelijk wordt aan de voorwaarden omtrent het begin der beweging te voldoen, dan is de oplossing ook teruggebracht tot quadraturen.

Deze methode leert bij elk coördinatenstelsel een krachtfunctie op te stellen, welke aanleiding geeft tot berekenbare bewegingen; men behoeft hiertoe slechts in de uitdrukking voor het arbeidsvermogen van beweging elk bewegingsmoment te vervangen door een functie van de overeenkomstige coördinaat.

Een gebrek der methode is ongetwijfeld, dat zij slechts in bijzondere gevallen kan worden toegepast. Om eenig vraagstuk van dynamica op te lossen begint men met de onafhankelijke coördinaten zoo te kiezen, als bij de meetkundige bepalingen van het stelsel best passen. Bij dit coördinatenstelsel zullen dan krachtfuncties behooren, welke veroorloven de bewegingsmomenten uit te drukken in de overeenkomstige coördinaten. Maar het is geheel toevallig, als de gegeven krachtfunctie hiertoe behoort, en zelfs dan vindt men dikwijls nog slechts enkele der mogelijke bewegingen.

Om dit gebrek naar waarde te beoordeelen moet men intusschen de methode niet op zich zelve beschouwen, maar ze vergelijken met andere. Men moet nagaan of er vele, belangrijke vraagstukken door de andere methoden kunnen worden opgelost, terwijl de thans behandelde methode daarbij geen toepassing kan vinden. Voor zoover door mij dit onderzoek is gedaan, is de uitkomst geweest, dat er zulke vraagstukken niet zijn. De methode is dus praktisch een algemeene.

4. De voordeelen der methode zijn mijns inziens belangrijk. De rekenwijze is geheel regelmatig; zijn de coördinaten eenmaal gekozen, dan heeft men een aangewezen berekening uit te voeren, om het arbeidsvermogen in formule te brengen; hierna blijkt het vanzelf, of het vraagstuk door die coördinaten is op te lossen of niet. Alle kunstgrepen van integraalrekening zijn van de baan gedrongen. Het welslagen van de poging tot oplossen hangt niet af van een gelukkigen inval voor het integreeren van een differentiaalvergelijking, maar enkel van het kiezen van het coördinatenstelsel. Hierdoor wordt een belangrijk feit op den voorgrond gesteld: de voorname rol, dien een coördinatenstelsel in de mechanica vervult. Deze belangrijkheid is reeds meermalen opgemerkt, onder anderen door Jacobi, bij gelegenheid van zijne berekening der geo-

detische lijnen op de ellipsoïde. Maar waarom de keuze der coördinaten van zoo overwegend belang is, dit blijkt uit andere methoden niet duidelijk. Men zou bijvoorbeeld meenen, dat als men de gedeeltelijke-differentiaalvergelijking voor de karakteristieke functie opmaakt, het vanzelf wel zal blijken, of de coördinaten met voordeel door andere zijn te vervangen; invoering van nieuwe onafhankelijke veranderlijken is toch niet zoo zwaar, dat men zou verwachten, dat geen geschikte substituties zijn uit te vinden. Toch is er geen voorbeeld bekend, waarin de genoemde gedeeltelijke-differentiaalvergelijking aanwijzing van het beste coördinatenstelsel heeft gegeven.

Behalve de geschiktheid der methode voor het oplossen van vraagstukken is er nog iets, waarop de aandacht gevestigd behoort te worden. Dit is namelijk de eigenaardige vorm, waarin de eerste integralen worden verkregen. Deze vorm is: $p - f(q) =$ *standvastig.* De methode leert alzoo kennen, welke dingen het zijn, die bij de beweging zich als onveranderlijk gedragen. Geeft men p den naam: »*actueel bewegingsmoment*", $-f(q)$ dien van »*potentieel bewegingsmoment*", dan zegt de vergelijking, dat het »*totaal bewegingsmoment*" behouden blijft. Deze vorm stemt geheel overeen met dien, waarin het beginsel van behoud van arbeidsvermogen wordt voorgesteld. De methode doet zich dus voor als de natuurlijke voortzetting van de reeks der belangrijke wetten, welke de studie der mechanica aan het licht heeft gebracht.

Die voorname wetten toch behelzen de erkenning van wat in de natuur blijvende is. Gelijk de leer van de onveranderlijkheid der massa het begin was van de ontwikkeling der chemie, zoo is ook de mechanica in den grond niets anders dan een onderzoek naar wat er blijvende is. Zoo heeft vooreerst de ontdekking van de wet der traagheid, welke de snelheid als een onveranderlijke vectorgrootheid deed kennen, de dynamica doen ontwikkelen; de wet van het behoud van hoeveelheid van beweging en die van de sectoren zijn daarvan de voortzetting, daar zij aanwijzen, hoe de snelheid van een lichaam op een ander wordt overgedragen. De wet van het behoud der levende kracht leert weer nieuwe vormen kennen, waarin onvergankelijke dingen herkend worden.

Nadat deze wetten zijn bekend geworden, is de dynamica niet meer in dezelfde richting ontwikkeld, maar is behandeld als zuivere wiskunde. Vooral JACOBI heeft haar opgevat als een probleem van integraalrekening, zoo zelfs, dat hij gemeend heeft, door zijn theorie van den laatsten multiplicator aan de »beginselen" der mechanica een nieuw te hebben toegevoegd; werkelijk geeft dit »beginsel van den laatsten multiplicator" niets meer dan een verklaring van de omstandigheid, dat bij de oplossing van een vraagstuk van dynamica de laatste twee integraties steeds op quadraturen neerkomen; en dit zegt weinig in vergelijking met een, ook door JACOBI gevonden, uitkomst, dat hetzelfde geldt voor het halve aantal integraties.

Indien het werkelijk gelukken mocht, de rij der beginselen van de dynamica in hun eigen richting voort te zetten, zoo zou het noodig zijn, nieuwe vormen te ontdekken van onveranderlijke grootheden. De beschouwing der bewegingsmomenten wijst die richting uit; daarom mag daarop de aandacht worden gevestigd.

5. De stelling van n°. 2 is te eenvoudig om aan te nemen, dat zij nooit vroeger is ontmoet; toch vond ik haar nergens vermeld, zoodat men moet aannemen, dat haar belangrijkheid niet is ingezien. Een bijzonder geval van de stelling is, dat de bewegingsmomenten standvastig zijn, als het arbeidsvermogen niet afhangt van hunne coördinaten; dit geval is besproken bij *Thomson and Tait*, *Natural Philosophy*, *new ed.* 1879, § 319. De schrijvers hebben daar de vergelijkingen van LAGRANGE opgesteld voor de overblijvende coördinaten; het blijkt, dat de overblijvende beweging is te berekenen uit de gegeven krachten met toevoeging van zekere weerstanden, welke afhangen van de eerste machten van de snelheidsontbondenen; deze weerstanden vervallen geheel in het bijzondere geval, dat de standvastige bewegingsmomenten nul zijn; van deze omstandigheid is door de schrijvers partij getrokken om sommige vraagstukken van beweging in een onsamendrukbare vloeistof eenvoudig op te lossen. Hetzelfde bijzondere geval van standvastige bewegingsmomenten is

besproken door HELMHOLTZ, in het 100ᵉ deel van *Crelle's Journal.* Het geval is inderdaad zeer belangrijk, omdat men zonder berekening het kan voorzien, als het zich voordoet.

In het algemeene geval, dat de bewegingsmomenten veranderlijk zijn, en wel functies van de overeenkomstige coördinaten, kan men ook de vergelijkingen van LAGRANGE voor de overige coördinaten opstellen; aan de berekeningen van THOMSON en TAIT behoeft slechts weinig te worden gewijzigd. Het is echter zeer twijfelachtig, of de uitkomst tot eenige belangrijke toepassing kan leiden; daarom laten wij de berekening hier achterwege.

6. Thans mogen een paar voorstellen worden opgelost om te doen zien, hoe de methode is toe te passen. Vooreerst kiezen wij daartoe het bekende vraagstuk van den conischen slinger.

Een zwaar punt is opgehangen aan een vast punt door middel van een onrekbaren draad zonder massa; gevraagd de algemeene beweging.

Als coördinaten kiezen wij het azimuth q_1 en den hoek q_2, tusschen de richting van den draad en de richting der zwaartekracht. Hier is duidelijk, dat het arbeidsvermogen van q_1 niet afhangt; daarom is het bewegingsmoment p_1 standvastig. Dit bewegingsmoment is de maat der veranderlijkheid van de levende kracht bij verandering van de fluxie $\dot{q}_1$, als $\dot{q}_2$ niet mede verandert; waaruit men licht afleidt, dat het in teeken met die fluxie overeenstemt; die fluxie is dus altijd positief of altijd negatief, dat wil zeggen, het verticale vlak van den draad draait steeds in denzelfden zin. Omdat er slechts twee coördinaten zijn, is nu ook p_2 een functie van q_2 alleen; van de beweging in het verticale vlak geldt dus nu een betrekking van den vorm: actueel bewegingsmoment plus potentiëel bewegingsmoment standvastig. Indien de baan een hoogste of een laagste punt heeft, dan is daar het actueel bewegingsmoment nul; en dus het potentiëele gelijk aan het totale, standvastige. Maar dan zal hetzelfde gebeuren, telkens als q_2 weer dezelfde waarde bereikt, zoodat alle bovenste culminaties, en ook alle onderste, in een horizon-

taal vlak liggen. Of deze vlakken werkelijk aanwezig zijn is niet uit te maken zonder het potentiëele bewegingsmoment te berekenen.

Men ziet hier het voordeel van de methode duidelijk; dat een enkelvoudige, gewone slinger steeds tot dezelfde hoogte klimt wordt verklaard door te zeggen, dat het arbeidsvermogen van beweging niet is uitgeput, voor dat het arbeidsvermogen van plaats een bepaalde waarde heeft bereikt. Dezelfde verklaring geldt niet voor den conischen slinger; het arbeidsvermogen van plaats moet hier worden vervangen door het »bewegingsmoment van plaats", om de zaak op overeenkomstige wijze te kunnen opvatten.

De berekening moge nog kortelijk plaats vinden. De horizontale ontbondene der snelheid is $l \sin q_2 . \dot{q}_1$, de ontbondene loodrecht daarop $l \dot{q}_2$; dus het arbeidsvermogen van beweging $\frac{1}{2} m l^2 (\dot{q}_1^2 \sin^2 q_2 + \dot{q}_2^2)$; dat van plaats kan worden gesteld $- m g l \cos q_2$; dus het geheele

$$\frac{1}{2} m l^2 (\dot{q}_1^2 \sin^2 q_2 + \dot{q}_2^2) - m g l \cos q_2 = \varepsilon.$$

De bewegingsmomenten zijn

$$p_1 = m l^2 \dot{q}_1 \sin^2 q_2, \quad p_2 = m l^2 \dot{q}_2 \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

Het arbeidsvermogen wordt dan ook uitgedrukt door

$$H \equiv \frac{p_1^2}{2 m l^2 \sin^2 q_2} + \frac{p_2^2}{2 m l^2} - m g l \cos q_2 = \varepsilon.$$

Deze vergelijking mag, volgens de stelling van n°. 2, worden gesplitst in

$$p_1 = C, \quad p_2^2 + (C^2 \sin^{-2} q_2 - 2 m^2 g l^3 \cos q_2) = 2 m l^2 \varepsilon \quad . \ . \ 6)$$

De waarden van q_2 voor de hoogste en laagste punten der baan worden berekend door p_2 gelijk nul te stellen. De beweging wordt geheel bekend door tusschen 5) en 6) p_1 en p_2 te elimineeren en te integreeren, wat niet wezenlijk onderscheiden is van de toepassing der vergelijkingen 2). De volledige uitwerking van een zoo bekend vraagstuk zou hier niet op haar plaats wezen.

7. Laat gevraagd worden naar de geodetische lijnen op een schroefvlak. Het komt er op aan de beweging te vinden van een stoffelijk punt, waarop geen krachten werken dan

de reactie der drukking, die het uitoefent op een schroefvlak, als het gedwongen is daarop te blijven. Als coördinaten kunnen dienen de booglengte q_1 van een lijn op het oppervlak, gemeten van een vast punt tot aan het stoffelijk punt, en de hoek q_2 der schroefbeweging, welke die lijn moet maken om uit een aan te nemen beginstand tot den tegenwoordigen stand te komen. De gesteldheid van het oppervlak is dan onafhankelijk van q_2, zoodat ook het arbeidsvermogen niet van q_2 afhangt; derhalve is het bewegingsmoment p_2 standvastig, en het eenige bewegingsmoment p_1, dat overblijft, kan worden uitgedrukt in functie van q_1. Indien deze functie voor sommige waarden van q_1 bestaanbaar en voor andere onbestaanbaar is, dan worden door de grenswaarden van q_1 op het oppervlak schroeflijnen aangewezen, die geraakt worden door alle geodetische lijnen, behoorende bij dezelfde waarde van p_2. Is een geodetische lijn tusschen een paar zulke schroeflijnen gelegen, dan loopt zij gedurig van de eene naar de andere, of verloopt in het oneindige; zij overschrijdt deze schroeflijnen niet. Uit de standvastigheid van p_2 vloeit voort, dat de beweging in den zin der schroeflijnen altijd dezelfde is.

De berekening moge worden uitgevoerd voor het bijzondere geval van een rechtlijnig schroefvlak. Nemen wij voor een oogenblik een rechthoekig coördinatenstelsel aan, waarvan de as O Z de as van het schroefvlak is, en O X den beginstand der rechte beschrijvende lijn op een afstand a van O rechthoekig snijdt; is dan α de hoek tusschen de beschrijvende lijn en de as O Z, $2\pi h$ de spoed van het schroefvlak, dan worden de rechthoekige coördinaten in de onafhankelijke uitgedrukt door

$$x = a \cos q_2 - q_1 \sin \alpha . \sin q_2 ,$$
$$y = a \sin q_2' + q_1 \sin \alpha . \cos q_1 ,$$
$$z = q_1 \cos \alpha + q_2 h.$$

Hieruit vindt men voor het arbeidsvermogen van beweging

$$\tfrac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2} \{ \dot{q}_1^2 + (a^2 + h^2 + q_1^2 \sin^2 \alpha) \dot{q}_2^2 +$$
$$+ 2 (a \sin \alpha + h \cos \alpha) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \};$$

de bewegingsmomenten zijn

$$p_1 = m\,\{\dot{q}_1 + (a\sin\alpha + h\cos\alpha)\,\dot{q}_2\},$$
$$p_2 = m\,\{(a\sin\alpha + h\cos\alpha)\,\dot{q}_1 + (a^2 + h^2 + q_1^2\sin^2\alpha)\,\dot{q}_2\};$$

en het geheele arbeidsvermogen is

$$H = \frac{p_1^2\,(a^2 + h^2 + q_1^2\sin^2\alpha) + p_2^2 - 2\,(a\sin\alpha + h\cos\alpha)\,p_1\,p_2}{2\,m\,\{(a\cos\alpha - h\sin\alpha)^2 + q_1^2\sin^2\alpha\}} = \varepsilon.$$

Wij zien, dat inderdaad door p_2 standvastig te stellen, H onafhankelijk is van q_2, en dus p_1 een functie van q_1 wordt. Voor ε schrijvende $\frac{1}{2}\,m\,v^2$, verkrijgen wij

$$p_1 = \frac{m\,v}{a^2 + h^2 + q_1^2\sin^2\alpha}\,\{C\,(a\sin\alpha + h\cos\alpha) \pm$$
$$\pm \sqrt{[-C^2 + a^2 + h^2 + q_1^2\sin^2\alpha]\,[(a\cos\alpha - h\sin\alpha)^2 + q_1^2\sin^2\alpha]},$$
$$p_2 = m\,v\,C.$$

De vergelijkingen 2) zijn hier

$$\frac{d\,q_1}{d\,t} = \frac{p_1\,(a^2 + h^2 + q_1^2\sin^2\alpha) - (a\sin\alpha + h\cos\alpha)\,p_2}{m\,[(a\cos\alpha - h\sin\alpha)^2 + q_1^2\sin^2\alpha]},$$
$$\frac{d\,q_2}{d\,t} = \frac{-(a\sin\alpha + h\cos\alpha)\,p_1 + p_2}{m\,[(a\cos\alpha - h\sin\alpha)^2 + q_1^2\sin^2\alpha]}.$$

In deze zijn de bovenstaande waarde van p_1 en p_2 te substitueeren; na eliminatie van $d\,t$ houdt men de differentiaalvergelijking der geodetische lijnen over, namelijk

$$\frac{d\,q_2}{d\,q_1} = -\frac{a\sin\alpha + h\cos\alpha}{a^2 + h^2 + q_1^2\sin^2\alpha} \pm \frac{C}{a^2 + h^2 + q_1^2\sin^2\alpha}\,\times$$
$$\times \sqrt{\frac{(a\cos\alpha - h\sin\alpha)^2 + q_1^2\sin^2\alpha}{-C^2 + a^2 + h^2 + q_1^2\sin^2\alpha}}.$$

Er zijn drie gevallen te onderscheiden. Als **vooreerst** $C^2 < a^2 + h^2$, dan is p_1 voor alle waarden van q_1 bestaanbaar; de geodetische lijn ontmoet de intrekkingslijn van het schroefvlak $[q_1 = 0]$, en strekt zich aan weerskanten oneindig ver uit: tot deze soort van geodetische lijnen behooren de rechte beschrijvende lijnen (voor $C = 0$). Als **ten tweede** $C^2 = a^2 + h^2$ is, dan kan q_1 alle waarden behalve nul hebben; de intrekkingslijn is dan asymptoot. Als **ten derde** $C^2 > a^2 + h^2$ is, dan mag q_1^2 niet beneden een bepaald bedrag dalen; er is dan een bepaalde schroeflijn, waarbuiten de geodetische lijn moet blijven.

In het algemeen worden de geodetische lijnen bepaald door een elliptische integraal van de derde soort. Uitzonderingen zijn de gevallen: $C = 0$, $C = a\sin\alpha + h\cos\alpha$, $C = \sqrt{(a^2 + h^2)}$

en $a \cos\alpha - h \sin\alpha = 0$; het laatste geval is dat van het ontwikkelbare schroefvlak.

8. Een eenvoudig vraagstuk, waarbij geen standvastig bewegingsmoment in rekening komt, is: de beweging te vinden van een zwaar lichaam, draaibaar om een horizontale as A, die zelf in een hellend vlak bewegelijk is. Noem de massa M; den gierstraal om een lijn door het zwaartepunt, evenwijdig aan de as A getrokken, k; de lengte der loodlijn uit het zwaartepunt op de as A neergelaten, a; den hoek van deze lijn met het hellend vlak θ; den afstand van de projectie van het zwaartepunt op het hellend vlak tot een vaste horizontale lijn in dat vlak x; den hellingshoek α. Het arbeidsvermogen van beweging is dan uit te drukken door

$$\tfrac{1}{2} M[\dot{x}^2 + (k^2 + a^2 \cos^2\theta)\dot{\theta}^2],$$

dat van plaats door

$$M g\,(x \sin\alpha - a \sin\theta . \cos\alpha).$$

De bewegingsmomenten zijn

$$p_1 = M\dot{x},\ p_2 = M(k^2 + a^2 \cos^2\theta)\dot{\theta}.$$

Het geheele arbeidsvermogen wordt uitgedrukt door

$$H \equiv \frac{p_1^2}{2M} + \frac{p_2^2}{2M(k^2 + a^2\cos^2\theta)} + M g\,(x \sin\alpha - a \sin\theta . \cos\alpha) = \varepsilon.$$

Men kan p_1 in x, p_2 in θ uitdrukken door

$$\frac{p_1^2}{2M} + M g\, x \sin\alpha = \varepsilon - C,$$

$$\frac{p_2^2}{2M(k^2 + a^2 \cos^2\theta)} - M g\, a \sin\theta . \cos\alpha = C.$$

De verdere uitwerking moge hier achterwege blijven; men zie bijvoorbeeld bij JULLIEN, *Problèmes de mécanique rationelle*, T. 2, p. 148.

9. In n°. 2 werd aangestipt, dat de vergelijkingen 4) juist niet identiek behoefden te zijn, maar ook integralen van de kanonieke vergelijkingen zouden mogen wezen. Een enkel voorbeeld, waarbij dit te pas komt, moge nog besproken worden.

Laat de vraag zijn: de beweging te vinden van een lichaam om een vast punt, als geen uitwendige krachten werken.

Neem een vast rechthoekig coördinatenstelsel O X Y Z aan,

en een met het lichaam bewogen stelsel O A B C; laat het vlak X O Y het vlak A O B snijden volgens een lijn O L. De onafhankelijke coördinaten kunnen zijn de hoeken: $\theta = $ Z O C, $\psi = $ X O L, $\phi = $ L O A, dus de bekende Euleriaansche. Stel p, q, r, de ontbondenen der hoeksnelheid op O A, O B, O C, dan gelden de formules

$$p = \sin\phi . \sin\theta . \dot{\psi} + \cos\phi . \dot{\theta},$$
$$q = \cos\phi . \sin\theta . \dot{\psi} - \sin\phi . \dot{\theta},$$
$$r = \dot{\phi} + \cos\theta . \dot{\psi},$$

zooals in de leerboeken te vinden is. Het arbeidsvermogen wordt uitgedrukt door de helft van

$$2\,T = A\,p^2 + B\,q^2 + C\,r^2 - 2\,D\,q\,r - 2\,E\,r\,p - 2\,F\,p\,q;$$

de bewegingsmomenten zijn

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = A\,p\cos\phi - B\,q\sin\phi + D\,r\sin\phi - E\,r\cos\phi -$$
$$- F\,q\cos\phi + F\,p\sin\phi,$$
$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = A\,p\sin\phi . \sin\theta + B\,q\cos\phi . \sin\theta + C\,r\cos\theta -$$
$$- D\,q\cos\theta - D\,r\cos\phi . \sin\theta - E\,r\sin\phi . \sin\theta -$$
$$- E\,p\cos\theta - F\,p\cos\phi . \sin\theta - F\,q\sin\phi . \sin\theta,$$
$$p_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = C\,r - D\,q - E\,p.$$

Men zoude uit deze drie p, q, r moeten oplossen, en de waarden in de uitdrukking voor 2 T moeten overbrengen. Zonder dit uit te voeren is het duidelijk, dat ψ in de waarde van H niet zal voorkomen; derhalve is het bewegingsmoment p_2 standvastig, een uitkomst, die zonder berekening even goed te voorzien was. Wij schrijven deze in den vorm

$$(A\,p - F\,q - E\,r)\sin\phi . \sin\theta + (F - p + D\,q - D\,r)\cos\phi . \sin\theta +$$
$$+ (-E\,p - D\,q + C\,r)\cos\theta = l_3.$$

De tusschen haakjes geplaatste sommen zijn de momenten van de hoeveelheid van beweging om O A, O B, O C; derhalve is het geheele bewegingsmoment het moment van de hoeveelheid van beweging om O Z. Daar O Z een willekeurige richting heeft, is ook het moment van de hoeveelheid van beweging om O X, en dat om O Y, standvastig; hierdoor heeft men de vergelijkingen

$$(A p - F q - E r)(\cos\psi . \cos\Phi - \sin\psi . \cos\theta . \sin\Phi) +$$
$$+ (-F p + B q - D r)(-\cos\psi . \sin\Phi - \sin\psi . \cos\theta . \cos\Phi) +$$
$$+ (-E p - D q + C r) \sin\psi . \sin\theta = l_1,$$
$$(A p - F q - E r)(\sin\psi . \cos\Phi + \cos\psi . \cos\theta . \sin\Phi) +$$
$$+ (-F p + B q - D r)(-\sin\psi . \sin\Phi + \cos\psi . \cos\theta . \cos\Phi) +$$
$$+ (-E p - D q + C r)(-\cos\psi . \sin\theta) = l_2.$$

Deze vergelijkingen hebben wij hier opgesteld om te doen zien, dat onze methode niet in gebreke is; de volledige oplossing zoude uit de gevonden vergelijkingen zijn af te leiden.

Neem nu $D = E = F = l_1 = l_2 = 0$, dan wordt aan de algemeenheid niet te kort gedaan; O Z is nu de as van het moment van hoeveelheid van beweging; O A, O B, O C zijn hoofdassen van traagheid. De bewegingsmomenten zijn

$$p_1 = 0, \; p_2 = l_3, \; p_3 = l_3 \cos\theta ;$$

het arbeidsvermogen is

$$\frac{l_3^2}{2}\left(\frac{\sin^2\Phi . \sin^2\theta}{A} + \frac{\cos^2\Phi . \sin^2\theta}{B} + \frac{\cos^2\theta}{C}\right) = E.$$

De bewegingsmomenten zijn niet in de overeenkomstige coördinaten uitgedrukt; er ontbreekt, dat p_3 functie van Φ moest wezen. Door gebruik te maken van de betrekking tusschen Φ en θ is dit te bereiken; maar dan maken die waarden der bewegingsmomenten het arbeidsvermogen niet onafhankelijk van de coördinaten: de vergelijkingen 4) zijn dan integralen.

OVER DEN QUATERNION-MATRIX,

DOOR

Th. B. VAN WETTUM.

I. *Bewijs van de stelling, dat de Quaternion-Matrix en de Matrix voor evenwijdige rechthoekige coördinaten-vervorming, bij behoud van oorsprong, in de ruimte, dezelfde zijn, mits de laatste van positieve determinant zij.*

1. De Matrix voor de vervorming van evenwijdige rechthoekige coördinaten in de ruimte, bij behoud van oorsprong, heeft tot elementen de cosinussen van de negen hoeken, die de oude assen met de nieuwe maken.

Daar slechts drie dezer hoeken willekeurig zijn, ontmoet men dien Matrix bij elk onderzoek vergezeld van een reeks betrekkingen, die het overzicht erg verzwaren. Door de formulen van EULER, die maar drie hoeken bevatten, is hierin wel voorzien, maar deze bemoeielijken door haar gemis aan symmetrie de nasporingen in de meetkunde der ruimte weer op hare wijze.

Men kan dien Matrix evenwel herleiden tot hij nog maar van vier hoeken afhangt, zoodat wel één bijbetrekking noodig is, maar veel symmetrie behouden blijft. De herleide vorm zal blijken dezelfde te zijn als de Quaternion-Matrix Q, dien ik in Dl. XVII van het »Nieuw Archief van Wiskunde'' afleidde als stelkundig symbool van een radiaal vectoren-quotient.

2. Gaan wij uit van de vergelijkingen

$$(x', y', z') = \begin{vmatrix} \alpha & c_2 & b_1 \\ c_1 & \beta & a_2 \\ b_2 & a_1 & \gamma \end{vmatrix} (x, y, z) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

met de bekende betrekkingen

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^2 + c_2^2 + b_1^2 = 1, \\ c_1^2 + \beta^2 + a_2^2 = 1, \\ b_2^2 + a_1^2 + \gamma^2 = 1; \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^2 + c_1^2 + b_2^2 = 1, \\ c_2^2 + \beta^2 + a_1^2 = 1, \\ b_1^2 + a_2^2 + \gamma^2 = 1; \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\, c_1 + c_2\, \beta + b_1\, a_2 = 0, \\ c_1\, b_2 + \beta\, a_1 + a_2\, \gamma = 0, \\ b_2\, \alpha + a_1\, c_2 + \gamma\, b_1 = 0; \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\, c_2 + c_1\, \beta + b_2\, a_1 = 0, \\ c_2\, b_1 + \beta\, a_2 + a_1\, \gamma = 0, \\ b_1\, \alpha + a_2\, c_1 + \gamma\, b_2 = 0; \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

waarbij zich nog voegen

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \beta\, \gamma - a_1\, a_2, \\ \beta = \gamma\, \alpha - b_1\, b_2, \\ \gamma = \alpha\, \beta - c_1\, c_2; \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = b_1\, c_1 - a_2\, \alpha, \\ b_1 = c_1\, a_1 - b_2\, \beta, \\ c_1 = a_1\, b_1 - c_2\, \gamma; \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = b_2\, c_2 - a_1\, \alpha, \\ b_2 = c_2\, a_2 - b_1\, \beta, \\ c_2 = a_2\, b_2 - c_1\, \gamma. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Naar aanleiding van deze betrekkingen zij opgemerkt:

1°. dat, als alle teekens der elementen worden omgekeerd, de betrekkingen (1) tot (4) onveranderd blijven, terwijl in die van (5) tot (7) alleen de eerste leden van teeken veranderen;

2°. dat alle betrekkingen in elkaar overgaan bij paren, namelijk (1) en (2), (3) en (4) (6) en (7), terwijl (5) onveranderd blijft, als men $(a_1\, b_1\, c_1)$ respectievelijk met $(a_2\, b_2\, c_2)$ verwisselt;

3°. dat de betrekkingen dezelfde blijven, als men de teekens van twee der drie paren grootheden $(a_1\, a_2)$, $(b_1\, b_2)$ en $(c_1\, c_2)$ omkeert.

Leiden wij nog tevens uit (1) en (2) de vergelijking

$$a_1^2 - a_2^2 = b_1^2 - b_2^2 = c_1^2 - c_2^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

af, die ons meerdere diensten moet bewijzen.

3. Voor de punten (ξ, η, ζ), wier coördinaten door de vervorming geen verandering ondergaan, geven de vergelijkingen (A) ter oplossing

$$\begin{vmatrix} \alpha-1 & c_2 & b_1 \\ c_1 & \beta-1 & a_2 \\ b_2 & a_1 & \gamma-1 \end{vmatrix} (\xi, \eta, \zeta) = (0, 0, 0)$$

Voor de mogelijkheid der oplossing dezer vergelijkingen voor andere waarden dan 0 voor ξ, η, ζ, wordt vereischt dat de determinant op de coëfficienten $= 0$ zij.

Door ontwikkeling van dezen determinant vindt men

$$\begin{aligned}(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1) - a_1 a_2 (\alpha-1) + c_2 (a_2 b_2 - c_1 \gamma + c_1) + \\ + b_1 (a_1 c_1 - b_2 \beta + b_2) = \alpha(\beta\gamma - a_1 a_2) + c_2 (a_2 b_2 - c_1 \gamma) + \\ + b_1 (a_1 c_1 - b_2 \beta) + (\alpha + a_1 a_2 - \beta\gamma) + (\beta + b_1 b_2 - \alpha\gamma) + \\ + (\gamma + c_1 c_2 - \alpha\beta) - 1 = 0.\end{aligned}$$

Aan deze voorwaarde voldaan zijnde, volgt verder

$$\begin{aligned}\xi:\eta:\zeta &= \{(\beta-1)(\gamma-1) - a_1 a_2\} : \{a_2 b_2 - c_1(\gamma-1)\} : \{a_1 c_1 - b_2(\beta-1)\} \\ &= \{a_1 b_1 - c_2(\gamma-1)\} : \{(\gamma-1)(\alpha-1) - b_1 b_2\} : \{b_2 c_2 - a_1(\alpha-1)\} \\ &= \{a_2 c_2 - b_1(\beta-1)\} : \{b_1 c_1 - a_2(\alpha-1)\} : \{(\alpha-1)(\beta-1) - c_1 c_2\}.\end{aligned}$$

Door middel van (5) tot (7) herleiden deze zich tot den eenvoudigen vorm

$$\left.\begin{aligned}\xi:\eta:\zeta &= (1+\alpha-\beta-\gamma) : (c_1+c_2) : (b_1+b_2) \\ &= (c_1+c_2) : (1-\alpha+\beta-\gamma) : (a_1+a_2) \\ &= (b_1+b_2) : (a_1+a_2) : (1-\alpha-\beta+\gamma)\end{aligned}\right\}, \quad (9a)$$

of zooals gemakkelijk volgt [1])

$$\xi:\eta:\zeta = \frac{1}{a_1+a_2} : \frac{1}{b_1+b_2} : \frac{1}{c_1+c_2}; \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

met de betrekkingen

$$\left.\begin{aligned}1+\alpha-\beta-\gamma &= \frac{(b_1+b_2)(c_1+c_2)}{a_1+a_2}, \\ 1+\alpha+\beta-\gamma &= \frac{(c_1+c_2)(a_1+a_2)}{b_1+b_2}, \\ 1-\alpha-\beta+\gamma &= \frac{(a_1+a_2)(b_1+b_2)}{c_1+c_2}.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

---

1) Gevallen als $a_1 + a_2 = 0$ worden later afzonderlijk besproken.

4. Het verdient de aandacht, dat voor het bewijs van het nul zijn van den determinant in (**3**) de vergelijkingen (5) tot (7) noodig zijn. Uit de vergelijkingen (1) tot (4) kan men afleiden, dat òf de vergelijkingen (5) tot (7) waar zijn, òf dezelfde vergelijkingen met verandering in teeken van het eerste lid.

Deden wij evenwel een tegengestelde kenze dan in (**3**) is geschied, dan vond men voor den determinant

$$-\alpha^2-c_2^2-b_1^2+2\alpha+2\beta+2\gamma-1=-2(1-\alpha-\beta-\gamma),$$

en verder

$$\begin{aligned}\xi:\eta:\zeta &= (1-\alpha-\beta-\gamma):(c_1-c_2):(b_2-b_1)\\ &= (c_2-c_1):(1-\alpha-\beta-\gamma):(a_1-a_2)\\ &= (b_1-b_2):(a_2-a_1):(1-\alpha-\beta-\gamma);\end{aligned}$$

dat met den determinant $=0$ alleen mogelijk is voor

$$\xi=\eta=\zeta=0 \text{ en } a_1=a_2,\ b_1=b_2,\ c_1=c_2;$$

dat wil zeggen er is dan geen overgang door wenteling mogelijk.

Wij zijn dus verplicht de vergelijkingen (5) tot (7) onveranderd te behouden, dat tevens neerkomt op het gelijkstellen van den determinant in (A) aan $+1$.

Men weet, dat de formulen van Euler ook alleen in dezelfde onderstelling waar zijn [1]), terwijl ook Hamilton overal in zijn »Elements" zijne coördinatenstelsels aan de bepaling onderwerpt, dat de assen zoo worden gekozen, dat de wenteling om de x-as van de y-as naar de z-as in positieve richting 90° bedrage.

Het is ook gemakkelijk in te zien, dat, als alle teekens der coördinaten alleen veranderen, wat zou worden voorgesteld door den matrix

$$\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}$$

geen punt dan de oorsprong zijn oorspronkelijke coördinaten behoudt.

5. Uit de vergelijkingen (10) volgt, dat de grootheden

1) Men zie b.v. Briot et Bouquet, Leçons de Geometrie Analytique, 8ième édition, § 424.

links hetzelfde teeken hebben, en daar hunne som $(3-\alpha-\beta-\gamma)$ noodzakelijk positief is, dit met elk het geval moet zijn.

Door vermenigvuldiging twee aan twee geven zij

$$\left.\begin{aligned}(a_1+a_2)^2&=(1-\alpha+\beta-\gamma)(1-\alpha-\beta+\gamma),\\(b_1+b_2)^2&=(1-\alpha-\beta+\gamma)(1+\alpha-\beta-\gamma),\\(c_1+c_2)^2&=(1+\alpha-\beta-\gamma)(1-\alpha+\beta-\gamma);\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(11)$$

en in verband met (5) naar een aangewezene herleiding

$$\left.\begin{aligned}(a_1-a_2)^2&=(1+\alpha+\beta+\gamma)(1+\alpha-\beta-\gamma),\\(b_1-b_2)^2&=(1+\alpha+\beta+\gamma)(1-\alpha+\beta-\gamma),\\(c_1-c_2)^2&=(1+\alpha+\beta+\gamma)(1-\alpha-\beta+\gamma).\end{aligned}\right\}\quad.\quad(12)$$

Voor de bestaanbaarheid wordt dus nog gevorderd, dat $1+\alpha+\beta+\gamma>0$ zij, dus $\alpha+\beta+\gamma>-1$ en ook <3; dus

$$-1<\alpha+\beta+\gamma<3,$$

$$-1<\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma-1)<1\quad\ldots\ldots\quad(13)$$

6. De punten ξ, η, ζ van (**3**) liggen blijkens (9) op een vector, die door den oorsprong gaat. Noemen wij de hoeken, die deze vector, zoowel met de oude als met de nieuwe assen maakt, k_1, k_2 en k_3, dan is

$$\xi:\eta:\zeta=\cos k_1:\cos k_2:\cos k_3.$$

Daar naar (9) en (10)

$$\xi^2:\eta^2:\zeta^2=(1+\alpha-\beta-\gamma):(1-\alpha+\beta+\gamma):(1-\alpha-\beta+\gamma),$$

volgt

$$\cos^2 k_1=\frac{1+\alpha-\beta-\gamma}{3-\alpha-\beta-\gamma},\quad \cos^2 k_2=\frac{1-\alpha+\beta-\gamma}{3-\alpha-\beta-\gamma},$$

$$\cos^2 k_3=\frac{1-\alpha-\beta+\gamma}{3-\alpha-\beta-\gamma}.$$

Stellen wij nu nog met het ook op (13)

$$\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma-1)=\cos p,$$

en $p<180°$, om dubbelzinnigheid te vermijden, dan wordt $3-\alpha-\beta-\gamma=2(1-\cos p)$ en $1+\alpha+\beta+\gamma=2(1+\cos p)$, dus

$$\left.\begin{aligned}1+\alpha-\beta-\gamma&=2(1-\cos p)\cos^2 k_1,\\1-\alpha+\beta-\gamma&=2(1-\cos p)\cos^2 k_2,\\1-\alpha-\beta+\gamma&=2(1-\cos p)\cos^2 k_3;\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(14)$$

waaruit door optelling, twee aan twee, volgt

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=(1-\cos p)\cos^2 k_1+\cos p,\\\beta&=(1-\cos p)\cos^2 k_2+\cos p,\\\gamma&=(1-\cos p)\cos^2 k_3+\cos p.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(15)$$

7. De laatste vergelijkingen geven de elementen van den hoofddiagonaal van den Matrix in (A) gelijk aan de overeenkomstige elementen van den Matrix Q (zie **1**).

Dat k_1, k_2 en k_3 overeenstemmende beteekenis hebben, volgt terstond; dat dit met p ook het geval is, kan uit elk der vergelijkingen (15) blijken. Bijvoorbeeld: α wordt $= \cos p$ als $\cos k_1 = 0$ is, dat is, als de x-as loodrecht staat op de as van wenteling; dat dan p als hoek van wenteling, tevens de verplaatsing van de x-as meet, mag wel als bekend worden aangenomen.

Bovendien worden nog de vergelijkingen (11) en (12) door (14)

$$\left.\begin{aligned}(a_1 + a_2)^2 &= 4\,(1 - \cos p)^2 \cos^2 k_2 . \cos^2 k_3,\\(b_1 + b_2)^2 &= 4\,(1 - \cos p)^2 \cos^2 k_3 . \cos^2 k_1,\\(c_1 + c_2)^2 &= 4\,(1 - \cos p)^2 \cos^2 k_1 . \cos^2 k_2;\end{aligned}\right\} \quad . . . (16)$$

en

$$\left.\begin{aligned}(a_1 - a_2)^2 &= 4 \sin^2 p . \cos^2 k_1,\\(b_1 - b_2)^2 &= 4 \sin^2 p . \cos^2 k_2,\\(c_1 - c_2)^2 &= 4 \sin^2 p . \cos^2 k_3 .\end{aligned}\right\} \quad . . . . . . (17)$$

8. Om te doen zien, dat ook de overige elementen in de beide Matrices overeenkomen, merken wij eerst op, dat uit (8) en (9), namelijk

$$a_1^2 - a_2^2 = b_1^2 - b_2^2 = c_1^2 - c_2^2, \quad . . . . (8)$$

$$\xi : \eta : \zeta = \frac{1}{a_1 + a_2} : \frac{1}{b_1 + b_2} : \frac{1}{c_1 + c_2}, \quad . . . . (9)$$

volgt

$$\xi : \eta : \zeta = (a_1 - a_2) : (b_1 - b_2) : (c_1 - c_2);$$

en daar

$$\xi : \eta : \zeta = \cos k_1 : \cos k_2 : \cos k_3 ,$$

volgt, blijkens de tweede opmerking in (2), dat wij mogen kiezen tusschen

$$\left.\begin{aligned}a_1 - a_2\\b_1 - b_2\\c_1 - c_2\end{aligned}\right\} = + \text{ òf } - \left\{\begin{aligned}&2 \sin p . \cos k_1,\\&2 \sin p . \cos k_2,\\&2 \sin p . \cos k_3,\end{aligned}\right.$$

af te leiden uit (17).

Evenzoo voor de vergelijkingen (16) zijn wij, blijkens de 3e opmerking in (2) en door

$$\xi : \eta : \zeta = \frac{1}{a_1 + a_2} : \frac{1}{b_1 + b_1} : \frac{1}{c_1 + c_2},$$

$$\xi : \eta : \zeta = \cos k_1 : \cos k_2 : \cos k_3,$$

gerechtigd te kiezen tusschen

$$\left.\begin{array}{r} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \end{array}\right\} = + \text{ òf } - \left\{\begin{array}{l} 2\,(1 - \cos p) \cos k_2 . \cos k_3, \\ 2\,(1 - \cos p) \cos k_3 . \cos k_1, \\ 2\,(1 - \cos p) \cos k_1 . \cos k_2 . \end{array}\right.$$

9. Beide keuzen worden bepaald door aan te nemen, in het belang van de beteekenis van den Matrix Q, dat

»wanneer de positieve richting der as van wenteling gelegen
»is in het op den bol, om den oorsprong beschreven,
»door de positieve richtingen der assen uitgesneden octant,
»de wenteling van het eerste coördinaten-stelsel naar het
»tweede in negatieven zin gebeure."

Voor een kleine wenteling p volgt dan vanzelf $a_1 > 0$ en $a_3 < 0$, dus voor de eerste keuze, het eerste teeken, of

$$\left.\begin{array}{r} a_1 - a_2 \\ b_1 - b_2 \\ c_1 - c_2 \end{array}\right\} = + \left\{\begin{array}{l} 2 \sin p . \cos k_1, \\ 2 \sin p . \cos k_2, \\ 2 \sin p . \cos k_3 . \end{array}\right.$$

Voor de tweede keuze heeft men alleen nog maar $\cos k_1$ bijvoorbeeld $= 0$ te stellen om te zien, dat, met de gemaakte afspraak, alleen het eerste teeken voldoet, daar dan zoowel a_1 als a_2 positief uitvalt.

10. Stelt men nu nog, bij wijze van vereenvoudiging in den matrix Q voormeld, $\cos p = a$, $\sin p . \cos k_1 = b$, $\sin p . \cos k_2 = c$, $\sin p . \cos k_3 = d$, dan heeft men, element voor element, de gelijkheid

$$\text{Matrix in } (A) = \begin{vmatrix} \alpha & c_2 & b_1 \\ c_1 & \beta & a_2 \\ b_2 & a_1 & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{b^2}{1+a} + a & \frac{b\,c}{1+a} - d & \frac{b\,d}{1+a} + c \\ \frac{b\,c}{1+a} + d & \frac{c^2}{1+a} + a & \frac{c\,d}{1+a} - b \\ \frac{b\,d}{1+a} - c & \frac{c\,d}{1+a} + b & \frac{d^2}{1+a} + a \end{vmatrix} = Q \text{ den Quaternion-Matrix.}$$

11. Bij den overgang van (9*a*) op (9) werd gewezen op de noodzakelijkheid van nog stil te staan bij gevallen, als bijv.

$$a_1 + a_2 = 0.$$

Uit de vergelijkingen (8) volgt daarbij terstond

$$b_1^2 - b_2^2 = c_1^2 - c_2^2 = 0;$$

dus de vier gevallen

$$\left.\begin{array}{l} b_1 + b_2 = c_1 + c_2 = 0, \\ b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = 0; \end{array}\right\} \text{(I)}$$

$$\left.\begin{array}{l} b_1 + b_2 = c_1 - c_2 = 0, \\ b_1 - b_2 = c_1 + c_2 = 0; \end{array}\right\} \text{(II)}$$

Het is niet moeielijk het onderzoek voor alle deze gevallen door te zetten.

De gevallen (I) leiden tot wentelingen om een der assen van het oorspronkelijke coördinaten-stelsel, of tot vormen van den Matrix als

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos p & -\sin p \\ 0 & \sin p & \cos p \end{vmatrix},$$

dus wentelingen om de x-as om hoeken van respectievelijk $0°$, $180°$, $p°$.

De gevallen (II) leiden tot wentelingen om assen, die in één der oorspronkelijke coördinaten-vlakken zijn gelegen, en geven verder tot geen bizondere opmerkingen aanleiding. In geen enkel geval is te vreezen voor een gemis aan doorloopendheid van de beschouwde grootheden.

12. Staan wij nu even stil bij de beteekenis der verkregene uitkomst.

De Matrix Q werd afgeleid als Matrix van een coördinatenvervorming, waarbij het coördinatenstelsel werd gewenteld over een hoek p, in negatieven zin om een as, wier positieve richting met de positieve richtingen der coördinaten-assen de hoeken k_1, k_2 en k_3 maakte.

Nu is bewezen, dat elke vervorming van rechthoekige coördinaten in de ruimte met behoud van oorsprong gelijkwaardig is met zoodanige wenteling, mits de Matrix van vervorming van positieve determinant zij.

Nemen wij nu nog eens de vergelijkingen A. Oorspronkelijk geven deze aan, dat bij de nu als wenteling bepaalde vervorming van het coördinatenstelsel, een vast punt P, dat eerst de coördinaten x, y, z had, later x', y', z' tot coördinaten heeft.

Met een kleine wijziging van opvatting ziet men ligt in, dat het punt, dat op het oorspronkelijke coördinatenstel

x', y', z' tot coördinaten heeft, dat punt P′ is, waarin het punt P zou belanden, als de vector O P, uit den oorsprong O naar P getrokken, om dezelfde as over den denzelfden hoek in positieven zin een in het algemeen kegelvormige wenteling volbracht-

Aldus opgevat, bepalen (x', y', z') en (x, y, z) op het oorspronkelijke vaste coördinaten-stelsel twee evenlange oorsprongsvectoren O P′ en O P, en is te begrijpen, hoe de Matrix in A of Q is op te vatten als een symbool voor het radiale vectorenquotient O P′ : O P, zij het ook in een zin afwijkende van dien van HAMILTON.

Alvorens evenwel nader uit te weiden over deze afwijking, gaan wij de uitkomst afleiden van opvolgende wentelingen.

II. *Produkten van Matrices als opvolgende wentelingen.*

13. Daar twee opvolgende coördinaten-vervormingen door een enkele vervangen kunnen worden, zullen wij ook den Matrix dezer laatste moeten kunnen samenstellen uit die der twee eerste, en wel, zooals bekend is, door vermenigvuldiging dier beide op de wijze van determinanten-vermenigvuldiging, en wel in aangegeven volgorde.

Gaan wij daartoe uit van den vorm (naar **10**)

$$\begin{vmatrix} \frac{b^2}{1+a}+a & \frac{b\,c}{1+a}-d & \frac{b\,d}{1+a}+c \\ \frac{b\,c}{1+a}+d & \frac{c^2}{1+a}+a & \frac{c\,d}{1+a}-b \\ \frac{b\,d}{1+a}-c & \frac{c\,d}{1+a}+b & \frac{d^2}{1+a}+a \end{vmatrix},$$

welken wij ter bekorting door $Q\,(a\,b\,c\,d)$ zullen voorstellen.

Noemen wij dus den Matrix der eerste vervorming $Q\,(a_1\,b_1\,c_1\,d_1)$, en dien der tweede $Q\,(a_2\,b_2\,c_2\,d_2)$, dan moet de Matrix $Q\,(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)$ bepaald worden, die voldoet aan de symbolische vergelijking

$$Q\,(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta) = Q\,(a_2\,b_2\,c_2\,d_2) \times Q\,(a_1\,b_1\,c_1\,d_1).$$

14. Voor het bepalen van den produkt-Matrix is alleen de kennis van α, β, γ en δ noodig. Daartoe merken wij op, dat in den Matrix $Q\,(a, b, c, d)$ de som der termen van den

hoofddiagonaal $1+2a$ is, dus $1+2\alpha$ gelijk zal zijn aan de som der termen van den hoofddiagonaal in den produktmatrix. Evenzoo is $2b$ het verschil van de laatste elementen in de tweede kolom en in de tweede rij respectievelijk van den eersten Matrix, $2c$ het verschil van de laatste elementen in de eerste rij en in de eerste kolom, terwijl $2d$ het verschil is der tweede elementen in de eerste kolom en in de eerste rij; waardoor de bepaling van β, γ en δ zeer wordt vergemakkelijkt.

15. Nog wordt de berekening aanmerkelijk bekort door het invoeren van de volgende vier grootheden

$$\left.\begin{aligned} a_3 &= a_2 a_1 - b_2 b_1 - c_2 c_1 - d_2 d_1, \\ b_3 &= - a_2 b_1 - b_2 a_1 - c_2 d_1 + d_2 c_1, \\ c_3 &= - a_2 c_1 + b_2 d_1 - c_2 a_1 - d_2 b_1, \\ d_3 &= - a_2 d_1 - b_2 c_1 + c_2 b_1 - d_2 a_1. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Deze grootheden voldoen aan de bekende betrekking

$$a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 + d_3^2 = (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2),$$

en HAMILTON gaf zijn produkt van twee quaternions met behulp van diezelfde grootheden, namelijk

$$(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) = a_3 - b_3 i - c_3 j - d_3 k.$$

Bovendien voldoen zij nog aan de volgende vergelijkingen, die men gemakkelijk kan bewijzen, en die door cyclische verwisseling van (18) ontstaan

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= a_3 a_2 - b_3 b_2 - c_3 c_2 - d_3 d_2, \\ b_1 &= - a_3 b_2 - b_3 a_2 - c_3 d_2 + d_3 c_2, \\ c_1 &= - a_3 c_2 + b_3 d_2 - c_3 a_2 - d_3 b_2, \\ d_1 &= - a_3 d_2 - b_3 c_2 + c_3 b_2 - d_3 a_2; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= a_1 a_3 - b_1 b_3 - c_1 c_3 - d_1 d_3, \\ b_2 &= - a_1 b_3 - b_1 a_3 - c_1 d_3 + d_1 c_3, \\ c_2 &= - a_1 c_3 + b_1 d_3 - c_1 a_3 - d_1 b_3, \\ d_2 &= - a_1 d_3 - b_1 c_3 + c_1 b_3 - d_1 a_3; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

mits maar, zooals in ons geval, voldaan is aan de voorwaarden

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2 = 1.$$

16. Gaan wij nu tot de berekening over, dan is, noemende σ de som der termen van den hoofddiagonaal in den produktmatrix, waardoor $\alpha = \frac{1}{2}(\sigma - 1)$ wordt,

$$\sigma = \left(\frac{b_2^2}{1+a_2} + a_2\right)\left(\frac{b_1^2}{1+a_1} + a_1\right) + \left(\frac{b_2 c_2}{1+a_2} - d_2\right)\left(\frac{b_1 c_1}{1+a_1} + d_1\right) +$$

$$+\left(\frac{b_2 d_2}{1+a_2}+c_2\right)\left(\frac{b_1 d_1}{1+a_1}-c_1\right)+\left(\frac{b_2 c_2}{1+a_2}+d_2\right)\left(\frac{b_1 c_1}{1+a_1}-d_1\right)+$$

$$+\left(\frac{c_2^2}{1+a_2}+a_2\right)\left(\frac{c_1^2}{1+a_1}+a_1\right)+\left(\frac{c_2 d_2}{1+a_2}-b_2\right)\left(\frac{c_1 d_1}{1+a_1}+b_1\right)+$$

$$+\left(\frac{b_2 d_2}{1+a_2}-c_2\right)\left(\frac{b_1 d_1}{1+a_1}+c_1\right)+\left(\frac{c_2 d_2}{1+a_2}-b_1\right)\left(\frac{c_1 d_1}{1+a_1}-b_1\right)+$$

$$+\left(\frac{d_2^2}{1+a_2}+a_2\right)\left(\frac{d_1^2}{1+a_1}+a_1\right)=$$

$$=\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}(b_2 b_1+c_2 c_1+d_2 d_1)^2+3\,a_2\,a_1-2\,(b_2 b_1+c_2 c_1+$$

$$+d_2\,d_1)+\frac{a_1}{1+a_2}\,(b_2^2+c_2^2+d_2^2)+\frac{a_2}{1+a_1}\,(b_1^2+c_1^2+d_1^2)=$$

$$=\frac{(a_2\,a_1-a_3)^2}{(1+a_1)\,(1+a_2)}+a_2\,a_1+2\,a_3+a_1\,(1-a_2)+a_2\,(1-a_1)=$$

$$=\frac{(a_2\,a_1-a_3)^2+(2\,a_3+a_1+a_2-a_1\,a_2)\,(1+a_1+a_2+a_1\,a_2)}{(1+a_1)\,(1+a_2)}=$$

$$=\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}\{a_2^2\,a_1^2-2a_1 a_2 a_3+a_3^2+2a_3\,(1+a_1+a_2+a_1 a_2)+$$

$$+(a_1+a_2-a_1\,a_2)\,(1+a_1+a_2+a_1\,a_2)\}=$$

$$=\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}\{a_3^2+2a_3(1+a_1+a_2)+(a_1+a_2)^2+a_1+a_2-a_1 a_2\}=$$

$$=\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}\{(1+a_1+a_2+a_3)^2-1-a_1-a_2-a_1 a_2\}=$$

$$=\frac{(1+a_1+a_2+a_3)^2}{(1+a_1)\,(1+a_2)}-1,$$

dus

$$\alpha=\frac{(1+a_1+a_2+a_3)^2}{2\,(1+a_1)\,(1+a_2)}-1\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad(21)$$

17. Evenzoo wordt $2\,\beta$ het verschil der laatste termen in de tweede kolom en in de tweede rij van den produktmatrix, dus achtereenvolgens

$$2\,\beta=\left(\frac{b_2 d_2}{1+a_2}-c_2\right)\left(\frac{b_1 c_1}{1+a_1}-d_1\right)+\left(\frac{c_2 d_2}{1+a_2}+b_2\right)\left(\frac{c_1^2}{1+a_1}+a_1\right)+$$

$$+\left(\frac{d_2^2}{1+a_2}+a_2\right)\left(\frac{c_1 d_1}{1+a_1}+b_1\right)-\left(\frac{b_2 c_2}{1+a_2}+d_2\right)\left(\frac{b_1 d_1}{1+a_1}+c_1\right)-$$

$$-\left(\frac{c_2^2}{1+a_2}+a_2\right)\left(\frac{c_1 d_1}{1+a_1}-b_1\right)-\left(\frac{c_2 d_2}{1+a_2}-b_2\right)\left(\frac{d_1^2}{1+a_1}+a_1\right)=$$

$$= \frac{(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2)(c_1 d_2 - c_2 d_1)}{(1+a_1)(1+a_2)} + 2a_1 b_2 + 2a_2 b_1 + c_2 d_1 - d_2 c_1 +$$

$$+ \frac{1}{1+a_2} \{ -b_2(c_1 c_2 + d_1 d_2) + b_1(c_2^2 + d_2^2)\} + \frac{1}{1+a_1} \{ -b_1(c_1 c_2 + d_1 d_2) +$$

$$+ b_2 (c_1^2 + d_1^2)\} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 - a_3)(c_1 d_2 - c_2 d_1)}{(1+a_1)(1+a_2)} + 2a_1 b_2 + 2a_2 b_1 + c_2 d_1 - d_2 c_1 +$$

$$+ \frac{1}{1+a_2} \{ - b_2 (b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + b_1 (b_2^2 + c_2^2 + d_2^2)\} +$$

$$+ \frac{1}{1+a_1} \{ -b_1 (b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + b_2 (b_1^2 + c_1^2 + d_1^2)\} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 - a_3)(c_1 d_2 - c_2 d_1)}{(1+a_1)(1+a_2)} - \left(\frac{b_1}{1+a_2} + \frac{b_2}{1+a_1}\right)(a_1 a_2 - a_3) +$$

$$+ b_1 (1 - a_2) + b_2 (1 - a_1) + 2 a_1 b_2 + 2 a_2 b_1 + c_2 d_1 - d_2 c_1 =$$

$$= \frac{a_1 a_2 - a_3}{(1+a_1)(1+a_2)} (c_1 d_2 - c_2 d_1 - b_2 - a_1 b_2 - b_1 - a_2 b_1) +$$

$$+ b_1 + b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_2 d_1 - d_2 c_1 =$$

$$= \frac{a_1 a_2 - a_3}{(1+a_1)(1+a_2)} (b_3 - b_2 - b_1) + b_1 + b_2 - b_3 =$$

$$= \frac{b_1 + b_2 - b_3}{(1+a_1)(1+a_2)} \{1 + a_1 + a_2 + a_1 a_2 - (a_1 a_2 - a_3)\} =$$

$$= \frac{(1 + a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 - b_3)}{(1+a_1)(1+a_2)}.$$

Dus vinden wij voor β, en evenzoo voor γ en δ,

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \frac{(1 + a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 - b_3)}{2(1+a_1)(1+a_2)}, \\ \gamma &= \frac{(1 + a_1 + a_2 + a_3)(c_1 + c_2 - c_3)}{2(1+a_1)(1+a_2)}, \\ \delta &= \frac{(1 + a_1 + a_2 + a_3)(d_1 + d_2 - d_3)}{2(1+a_1)(1+a_2)}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (22)$$

18. Om de beteekenis van de nu verkregen uitkomsten meetkundig na te gaan, zij

$a_1 = \cos p$, $b_1 = \sin p . \cos \varkappa_1$, $c_1 = \sin p . \cos \varkappa_2$, $d_1 = \sin p . \cos \varkappa_3$;
$a_2 = \cos q$, $b_2 = \sin q . \cos \lambda_1$, $c_2 = \sin q . \cos \lambda_2$, $d_2 = \sin q . \cos \lambda_3$;
$a_3 = \cos r$, $b_3 = \sin r . \cos \mu_1$, $c_3 = \sin r . \cos \mu_2$, $d_3 = \sin r . \cos \mu_3$;

Zijn dan p en q twee opvolgende zijden QR en RP van een driehoek op den eenheidsbol en $(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3)$ en $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de coördinaten hunner polen P′ en Q′, betrokken op een vast

coördinatenstelsel op dien bol; dan is, zooals uit de beschouwingen van HAMILTON volgt, of gemakkelijk door bolvormige driehoeksmeting is te bevestigen, r de derde zijde P Q van dien boldriehoek, en (μ_1, μ_2, μ_3) de coördinaten van den pool R′ dier zijde, terwijl $(180° - \mu_1, 180° - \mu_2, 180° - \mu_3)$ de coördinaten zijn van den tegenpool R″ dier zijde.

Onze uitkomsten toonen dan aan, dat de coördinaten-vervorming, aangeduid door den matrix $Q(a_1\, b_1\, c_1\, d_1)$, gevolgd door die aangeduid door $Q(a_2\, b_2\, c_2\, d_2)$, kan worden vervangen door die aangeduid door $Q(\alpha\, \beta\, \gamma\, \delta)$. Is men evenwel indachtig, dat een vervorming van coördinaten-stelsel of wenteling er van om een hoek in negatieven zin dezelfde verandering in de coördinaten van een punt brengt, als de wenteling van het punt om dezelfde as over denzelfden hoek in positieven zin, dan volgt nog:

»dat twee wentelingen van een systeem om twee in de »ruimte vaste assen, die elkaar in een punt O snijden, »gelijkwaardig zijn met één wenteling om een as door O."

Bovendien ligt de as dier resulteerende wenteling, zooals uit de symmetrische samenstelling van (21) en (22) volgt, of zich door berekening bevestigt, symmetrisch ten opzichte van OP′, OQ′ en OR″, en snijdt het oppervlak van den bol in het snijpunt der drie bogen, die de hoeken van driehoek P′ Q′ R″ middendoordeelen, evenals de cinematica dit tot nog toe alleen leerde. Evenzoo beantwoordt de resulteerende hoek van wenteling aan de uitkomst dier wetenschap [1]).

19. Om een voorbeeld en tevens een eenvoudige bevestiging der verkregen uitkomsten te hebben, laten wij nu nog het coördinaten-stelsel om de as O R′ over een hoek $= r$ wentelen. Wij kunnen dan voorzien, dat het hoekpunt Q van den oorspronkelijken boldriehoek weer op zijn plaats is teruggekomen, waardoor de as der resulteerende wenteling reeds is te voorspellen.

Wij zoeken nu de grootheden A, B, C en D voldoende aan de symbolische vergelijking

$$Q(a_3\, b_3\, c_3\, d_3) \times Q(\alpha\, \beta\, \gamma\, \delta) = Q(A\, B\, C\, D).$$

1) Men bevestigt een en ander gemakkelijk met behulp van de stelling van HAMILTON; zie Art. 19 van mijn vorig geschrift.

Stellen wij in overeenstemming met de vergelijkingen (18)

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{a} &= \quad a_3\,\alpha - b_3\,\beta - c_3\,\gamma - d_3\,\delta,\\ \mathbf{b} &= -a_3\,\beta - b_3\,\alpha - c_3\,\delta - d_3\,\gamma,\\ \mathbf{c} &= -a_3\,\gamma + b_3\,\delta - c_3\,\alpha - d_3\,\beta,\\ \mathbf{d} &= -a_3\,\delta - b_3\,\gamma \quad c_3\,\beta - d_3\,\alpha;\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (23)$$

dan vinden wij zonder moeite

$$A = \frac{(1+a_1+a_2+a_3)^2}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)},\quad C = \frac{(1+a_1+a_3+a_3)(d_3 b_1 - d_1 b_3)}{(1+a_1)(1+a_3)(1+a_3)},$$

$$B = \frac{(1+a_1+a_2+a_3)(c_3 d_1 - c_1 d_3)}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)},\quad D = \frac{(1+a_1+a_2+a_3)(b_3 c_1 - b_1 c_3)}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)}.$$

Is nu E het spherisch exces van driehoek P Q R, dan is $\cos E = A$ (zie HAMILTON's Elements, bladz. 339, form. LXIX).

Voorts is

$$\sin E = \frac{1+a_1+a_2+a_3}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)} \sqrt{(1-a_1^2-a_2^2-a_3^2+2\,a_1\,a_2\,a_3)},$$

dus, als wij $\sqrt{(1-a_1^2-a_2^2-a_3^2+2\,a_1\,a_2\,a_3)} = X$ stellen,

$$B = \frac{c_3 d_1 - c_1 d_3}{X} \sin E,\quad C = \frac{d_3 b_1 - d_1 b_3}{X} \sin E,\quad D = \frac{b_3 c_1 - b_1 c_3}{X} \sin E;$$

en daar

$$\begin{aligned}&(c_3\,d_1 - c_1\,d_3)^2 + (d_3\,b_1 - d_1\,b_3)^2 + (b_3\,c_1 - b_1\,c_3)^2 =\\ &= (b_1^2 + c_1^2 + d_1^2)(b_3^2 + c_3^2 + d_3^2) - (b_1\,b_3 + c_1\,c_3 + d_1\,d_3)^2 =\\ &= (1-a_1^2)(1-a_2^2) - (a_3 - a_1\,a_2)^2 = X^2 \text{ is,}\end{aligned}$$

kunnen wij stellen

$$\frac{c_3 d_1 - c_1 d_3}{X} = \cos \pi_1,\quad \frac{d_3 b_1 - d_1 b_3}{X} = \cos \pi_2,\quad \frac{b_3 c_1 - b_1 c_3}{X} = \cos \pi_3;$$

waar dan (π_1, π_2, π_3) de coördinaten van den pool der resulteerende wenteling worden, welke blijkt samen te vallen met het punt Q, zooals te voorzien was [1]).

20. Dat de grootte der resulteerende wenteling juist het spherisch exces moest zijn van driehoek P Q R is hoogsteenvoudig te bewijzen, door te zien waar bijvoorbeeld het punt P′ na afloop der drie wentelingen komt te liggen. Is P′ Q′ R′ de pooldriehoek als vroeger, dan blijft P′ door de eerste wenteling op zijn plaats, komt door de tweede wenteling in het verlengde van R′ Q′ en door de derde wenteling in 't verlengde van P′ R′ op een afstand van P′ gelijk aan de

---

1) O. a. door gebruik te maken van de formulen in Art. 24 van mijn vorig geschrift.

som der zijden van den pooldriehoek of 360° — E; de wenteling in tegengestelden zin om de as O Q over een hoek E had dus P′ in denzelfden stand gebracht.

III. *Kritiek van Hamilton's Quaternion.*

21. Aan het slot van (**12**) is gewezen op een afwijking van beteekenis in het woord »vectorenquotient" in de beschouwingswijze van HAMILTON en in die, welke hier wordt gegeven. Wij zijn nu zoover gekomen, dat tot een vergelijkende bespreking kan worden overgegaan tusschen HAMILTON's quaternion en den quaternion-matrix, dien wij hebben beschouwd.

Bij die bespreking is de tensor van geen invloed, en hebben wij ons alleen met radiale vectoren-quotienten te bemoeien, wat bij beide neerkomt op de voorwaarde

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

zoowel in den matrix Q als in den quaternion

$$a + b\,i + c\,j + d\,k,$$

dien wij q_0 zullen noemen.

Men herinnere zich evenwel, dat bij HAMILTON in dit geval, als men $a = \cos \Phi$ stelt, Φ den hoek beduidt tusschen de beide vectoren, terwijl in de door ons afgeleide betrekkingen $a = \cos p$ was, en p de hoek, over welken gewenteld werd.

Dit is van groot belang: men weet dat HAMILTON den naam »quaternion" ontleent aan het viertal:

Ratio Angle Ledge Slope.

Hij gaat dus van de alleszins juiste onderstelling uit, dat in een vectoren-quotient vier onderling onafhankelijke bepalende grootheden moeten voorkomen, en na verwijdering van den tensor (ratio) nog drie.

Het is intusschen gemakkelijk aan te toonen, dat dit met q_0 niet meer het geval is, en dat er behalve (24) nog een betrekking moet bestaan tusschen b, c en d, die in q_0 voorkomen, zoodat in plaats van drie, maar twee onderling onafhankelijke bepalende grootheden in q_0 te vinden zijn.

22. Om dit te bewijzen, nemen wij onze vergelijkingen

$$(x'\,y'\,z') = Q\,(a\,b\,c\,d)\,(x\,y\,z) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Zijn nu (x, y, z) en (x', y', z') twee punten P en Q op den

eenheidsbol, en betrokken als vroeger op een rechthoekig coördinaten-stelsel, dat het middelpunt O van dien bol tot oorsprong heeft, dan zijn tevens x, y, z en x', y', z' de cosinussen der hoeken die O P en O Q, als vectoren, met de coördinaten-assen maken, terwijl de hoek ϕ, dien deze vectoren met elkaar maken, tot cosinus heeft

$$\cos\phi = xx' + yy' + zz'.$$

Substitueeren wij hierin de waarden van $(x'\, y'\, z')$ uit (25) dan vinden wij

$$\cos\phi = a\,(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{1+a}(b^2 x^2 + 2b\,c\,x\,y + 2\,b\,d\,x\,z + \\ + c^2 y^2 + 2\,c\,d\,y\,z + d^2 z^2),$$

of daar

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ is en } a = \cos p,$$

$$\cos\phi = \cos p + \frac{1}{1 + \cos p}(b\,x + c\,y + d\,z)^2.$$

Hieruit volgt, dat de hoek der beide vectoren alleen dan tegelijk hoek van wenteling kan zijn, wanneer voldaan is aan de voorwaarde

$$b\,x + c\,y + d\,z = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

Dit is de zooeven genoemde tweede betrekking, zonder welke Hamilton's quaternion alle beteekenis mist, maar dóór welke die eigenlijk een »ternion" wordt.

23. Reeds vroeger is er op gewezen, dat door het invoeren van deze betrekking de vergelijkingen (25) den volgenden eenvoudigen vorm aannemen

$$(x'\, y'\, z') = \begin{vmatrix} a & -d & c \\ d & a & -b \\ -c & b & a \end{vmatrix} (x\,y\,z),$$

en dus de matrix zich naar Cayley als volgt laat splitsen

$$a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

waardoor hij de grootste overeenstemming in vorm vertoont met Hamilton's q_0 of $a + b\,i + c\,j + d\,k$, terwijl dan ook de grootheden a, b, c en d in beide juist dezelfde beteekenis krijgen.

Terloops zij hier nog opgemerkt, dat de splitsing van den

algemeenen matrix $Q(a\,b\,c\,d)$ hier nog aan toevoegt een stuk

$$\frac{1}{1+a}\begin{vmatrix} b^2 & bc & bd \\ bc & c^2 & cd \\ bd & cd & d^2 \end{vmatrix},$$

een matrix dien Cayley »undeterminate" noemt, als behoorende bij een stelsel afhankelijke vergelijkingen.

24. Nog op andere wijze is in te zien, dat men met het woord »vectorenquotient" zeer voorzichtig dient om te gaan. In onze gewone opvatting van een quotient is dit volkomen bepaald, als deeltal en deeler bepaald zijn: dit is met een »vectorenquotient" niet het geval. Een blik op het stelsel vergelijkingen

$$(x'\,y'\,z') = Q(a\,b\,c\,d)\,(x\,y\,z)$$

is voldoende om dit in te zien.

In de gewone onderstelling, dat $(x\,y\,z)$ en $(x'\,y'\,z')$ twee punten op den eenheidsbol zijn, en dus twee stralen er van als vectoren vertegenwoordigen, bevatten $(x'\,y'\,z')$ twee onafhankelijke gegevens, namelijk de verhoudingen van twee ervan tot de derde. Hetzelfde is met $(x\,y\,z)$ het geval, terwijl $Q(a\,b\,c\,d)$ er drie bevat. Twee van de zeven worden dus door de vijf overige bepaald, en dus niet het vectorenquotient door de beide vectoren. Men kan nu wel door het aantal onafhankelijke gegevens van Q met één te verminderen dit bezwaar opheffen, en dit heeft Hamilton blijkbaar gedaan door de genoemde beperking; maar dan houdt Q op, met inbegrip van den tensor, een »quaternion", en ook een matrix van coördinaten-vervorming te zijn, waarvan men zich ligt kan overtuigen.

25. Deze meer afbrekende dan opbouwende beschouwing van Hamilton's quaternion kan nog worden toegelicht uit de »Elements" zelve.

Vooreerst is de wijze, waarop Hamilton aan zijn q_0 als vierterm kòmt, van wiskundige zijde minstens onvoorzichtig te noemen, en ten andere is zijn produkt van twee quaternions voor een wiskundige niet als uitkomst eener vermenigvuldiging te duiden, maar eer, hoewel nog moeielijk, als een verbinding van getallen-vermenigvuldiging met een meetkundige optelling van bogen van groote cirkels op een bol.

Wat het eerste punt aangaat, handelt HAMILTON aldus.

Na den tensor bepaald te hebben, houdt hij nog een radiaal vectoren-quotient, stel $\frac{\text{O Q}}{\text{O P}}$ over, waarvan de vectoren O Q en O P een hoek Φ met elkaar mogen vormen. Hij splitst nu dit quotient op de bekende wijze in een *cos* Φ in de richting van O P en een *sin* Φ in de richting loodrecht op O P, in het vlak Q O P. Nu wordt, zonder genoegzamen grond, deze *sin* Φ overgeplaatst op de loodlijn in O op het vlak Q O P in een afgesproken zin afgezet, en vandaar geprojecteerd op de drie onderling loodrechte assen der i, j en k.. Deze standverandering van *sin* Φ mag verklaarbaar schijnen door sommige beschouwingen in de cinematica of de mechanica, maar voor den wiskundige mag wel op eenig recht van bestaan daarenboven worden aangedrongen.

26. Om tot zijn produkt van twee quaternions te geraken, laat HAMILTON als bepaling voorafgaan, dat twee vectoren-quotienten gelijk zijn, als zij in hetzelfde of in evenwijdige vlakken liggen, en daarin gelijkgeplaatste gelijkvormige driehoeken bepalen. Wij laten hier in het midden, welk recht men heeft een bepaling van gelijkheid te geven van dingen, waarvoor men nog geen middel van uitdrukking in maat en getal kent. De bepaling geeft het gemak, dat een vectoren-quotient in zijn vlak willekeurig kan worden verschoven en gedraaid.

Nu worden de twee te vermenigvuldigen vectoren-quotienten, die in verschillende elkaar snijdende vlakken liggen, zoo in hun vlak verplaatst, dat de deeltal-vector van het vermenigvuldigtal, in de doorsnede der beide vlakken, samenvalt met den deeler-vector van den vermenigvuldiger, en dan wordt voor produkt aangenomen het quotient der beide overblijvende vectoren, naar de formule, die als grondbeginsel was aangenomen,

$$\frac{\beta}{\alpha} \times \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}.$$

Hierbij wordt dus in het geheel geen rekening gehouden met de assen der beide vectoren-quotienten. De uitkomst van HAMILTON's vermenigvuldiging van twee vectoren-quotienten

is het produkt der twee tensores, vermenigvuldigd met een radiaal-quotient, dat men zich het gemakkelijkst voorstelt door de derde zijde van een boldriehoek, waarvan de beide andere zijden in een bepaalde volgorde de radiale quotienten voorstellen, die men aan vermenigvuldigtal en vermenigvuldiger ontleent door de tensores $=1$ te nemen. Het wordt dus, als boven reeds gezegd, een verbinding van de vermenigvuldiging der tensores met een meetkundige optelling op den bol.

27. Na het voorafgaande zal het niemand meer verwonderen, dat de quaternion van HAMILTON een »onbestaanbare grootheid in de ruimte" wordt genoemd; het is ook mogelijk, dat men er nog meer belangrijke eigenschappen aan gaat toedichten, dan tot nog toe, reeds in leerboeken voor lagere algebra, staan vermeld. In het voorgaande is bewezen, dat HAMILTON heeft misgetast, en na herziening van zijn standaardwerk, een verstaanbare meet-rekenkunde voor de ruimte nog niet onmogelijk is.

THEORIE DER STELKUNDIGE FUNCTIËN,

DOOR

R. J. ESCHER.

---

1. De invoering van de complexe grootheden door Euler, destijds door velen als een bloote merkwaardigheid beschouwd, heeft een beslissenden invloed op de ontwikkeling van de analyse uitgeoefend. Niet de innerlijke drang tot een uitbreiding van de grondbegrippen, alleen de uitwendige overeenkomst had den meester zonder weerga in het beheerschen van den vorm er toe gebracht den proef te nemen, en in zijne handen bleek dit een machtig instrument te zijn.

De invloed van de zes hoofdbewerkingen van de stelkunde op deze nieuwe grootheden werd onderzocht en vastgesteld, en daarna aan de betrekkingen, die er tusschen reeele grootheden bestonden, een uitbreiding gegeven ook voor complexe grootheden. Er werden op deze wijze belangrijke uitkomsten verkregen. Functiën, tot dusverre als geheel uiteenloopend beschouwd, zooals de exponentiaal- en de goniometrische functiën, werden met elkaar in verband gebracht. Nieuwe en merkwaardige betrekkingen, zooals het theorema van du Moivre, kwamen er aan het licht, die de hulpmiddelen van de analyse belangrijk uitbreidden. Maar bovenal kwam er een algemeen verband, waar vroeger alleen op zich zelf staande feiten aanwezig waren. Zoo was de grondeigenschap van de

stelkunde voorbereid, dat elke vergelijking evenveel wortels heeft als zijn graad bedraagt.

De gunstige uitkomsten, aldus verkregen, wettigden genoegzaam de zienswijze, dat deze uitbreiding van het oorspronkelijk begrip eener grootheid levensvatbaarheid bezat; maar de wijze, waarop men van reeele tot complexe grootheden overging, had haar bezwaren. De voorwaarden, die een dergelijken overgang wettigden, werden niet aan een voldoende kritiek onderworpen, en zoo was men niet zeker van de verkregen uitkomsten. De logarithmus levert een voorbeeld op, dat een dergelijke overgang niet eens altijd mogelijk is. Afgezien toch van het feit, dat de logarithmus van elk reeel getal reeds oneindig veel complexe waarden bezit, en dit dus, bij den overgang tot complexe waarden, reeds tot dubbelzinnigheid aanleiding geeft, hebben de logarithmen van negatieve getallen geen enkele reeele waarde, en dus heeft die overgang aldaar geen enkelen bepaalden zin.

2. Voor de waardebepaling van bepaalde integralen heeft Cauchy, in zijn »Mémoire sur les intégrales définies" in 1814 een ander gebruik gemaakt van het invoeren van complexe waarden, dat niet aan de opgenoemde bezwaren onderhevig was. Zijn grondgedachte hierbij was de eenvoudige waarheid dat, onder zekere omstandigheden, een vergelijking, na het invoeren van complexe veranderlijken, aanleiding geeft tot meer vergelijkingen. Ten opzichte van het doel, dat hij zich daarmede voorstelde te bereiken, slaagde hij volkomen. Bij vele bepaalde integralen geraakte hij op veel eenvoudiger wijze tot de uitkomst, dan vroeger was geschied, en het bracht hem ook tot de waarden van vele andere, tot dusver onbekend.

Het ligt niet in mijn plan, deze methode en de daarbij verkregen uitkomsten te bespreken; maar ik wil er op wijzen, dat het door hem behaalde succes het eigenaardige van de richting verklaart, waarin zijn onderzoekingen zich, gedurende een groot aantal jaren, hebben voortbewogen, en waarbij, op het gebied van de zuivere analyse, de waardebepaling van bepaalde integralen het hoofddoel is, dat hij najaagt.

3. In zijn »Mémoire sur les intégrales définies" stelde Cauchy zich nog iets anders tot doel, namelijk de oorzaken van

tegenstrijdigheden of dubbelzinnigheden op te sporen, die gerezen waren bij de algemeene toepassing van de eigenschap, dat men bij dubbel-integralen de orde van de integratie mag verwisselen.

Nemen wij toch de dubbelintegraal

$$I = \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \, \partial x} \, dy \, dx = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x \, \partial y} \, dx \, dy, \quad (1)$$

dan kan men de waarde van deze integraal op tweeërlei wijzen bepalen; namelijk door eerst de integratie ten opzichte van x en daarna die ten opzichte van y uit te voeren, of in de omgekeerde volgorde.

In het eerste geval krijgt men

$$I_1 = \int_{y_0}^{y_1} \left\{ \frac{\partial F(x_1, y)}{\partial y} - \frac{\partial F(x_0, y)}{\partial y} \right\} dy, \quad \ldots \quad (2)$$

en in het tweede geval

$$I_2 = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{\partial F(x, y_1)}{\partial x} - \frac{\partial F(x, y_0)}{\partial x} \right\} dx \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Om nu den aard van de moeilijkheden te doen uitkomen, die bij de toepassing van deze eigenschap kunnen rijzen, en tevens de methode bloot te leggen, door CAUCHY aangewend om de dubbelzinnigheden uit den weg te ruimen, zal ik een van de voorbeelden nemen, door CAUCHY zelf behandeld.

Zij daartoe

$$F(x,y) = bg\,tg\,\frac{y}{x}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

zoodat

$$dF = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(\frac{1}{x} \, dy - \frac{y}{x^2} \, dx \right) =$$

$$= \frac{x}{x^2 + y^2} \, dy - \frac{y}{x^2 + y^2} \, dx \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Zoo heeft men

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = - \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Volgens (2) en (6), verkrijgt men nu

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 \, bg\,tg \frac{y}{x}}{\partial y \, \partial x} \, dy\, dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} \, dy = bg\,tg\, 1 = \tfrac{1}{4} \pi ,$$

en volgens (3) en (7)

$$I_2 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 \, bg\,tg \frac{y}{x}}{\partial x \, \partial y} \, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 \left[- \frac{1}{1+x^2} \right] dx = - \, bg\,tg\, 1 = - \tfrac{1}{4} \pi .$$

Men komt dus hier tot een tegenstrijdigheid, en de oorzaak daarvan schrijft Cauchy aan het feit toe, dat de functie onder het integraalteeken

$$\frac{\partial^2 \, bg\,tg \frac{y}{x}}{\partial y \, \partial x} = \frac{\partial^2 \, bg\,tg \frac{y}{x}}{\partial x \, d y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} ,$$

voor de gelijktijdige waarden $x = 0$ en $y = 0$, den vorm $\frac{0}{0}$ aanneemt, en dus onbepaald wordt.

Cauchy trekt hieruit de gevolgtrekking, dat het in dit geval niet geoorloofd is de orde van de integratie te verwisselen; evenmin als in alle andere gevallen, waarbij de functie onder het integraalteeken voor de grenzen of voorwaarden, binnen die grenzen gelegen, oneindig of onbepaald wordt. Hij zegt voorts, dat men om van de waarde van de integraal in het eerste geval over te kunnen gaan tot die in het tweede geval, een correctie moet aanbrengen, waarvan hij de waarde bepaalt in den vorm van een andere bepaalde integraal, die men naar hem een bijzondere integraal noemt.

Om die correctie te bepalen, integreert hij ten opzichte van x tusschen δ en 1 en ten opzichte van y tusschen ε en 1, waarbij δ en ε onbegrensd kleine grootheden voorstellen. Hij vindt dan, na het volbrengen van eenige herleidingen, in dit geval voor die correctie:

$$\int_0^\varepsilon \frac{\delta \, dy}{\delta^2 + y^2} = bg\,tg \, \frac{\varepsilon}{\delta} .$$

Deze correctie is onbepaald, tenzij men tusschen δ en ε

een bepaalde betrekking aanneemt. Nu komt de eerst gevolgde orde van integratie hierop neer, dat men $\varepsilon = 0$ stelt, en de tweede dat men dit met δ doet. Op die wijze verkrijgt men werkelijk

$$I_1 = \tfrac{1}{4}\pi,$$
$$I_2 = \tfrac{1}{4}\pi - bg\, tg\, \infty = -\tfrac{1}{4}\pi.$$

Deze theorie berust slechts ten deele op een gezonden grondslag. Zij is echter algemeen door de wiskundigen aangenomen en in de leerboeken overgenomen, en daarom wensch ik bij dit punt stil te staan, om aan te wijzen, in welk opzicht de theorie mank gaat, en hoe zij kan verbeterd worden.

Bij rechtstreeksche herleiding vindt men

$$I_1 = \int_\varepsilon^1 \int_\delta^1 \frac{\partial^2 bg\, tg \frac{y}{x}}{\partial y\, \partial x}\, dx\, dy =$$
$$= \int_\varepsilon^1 \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{\delta}{\delta^2 + y^2} \right) dy =$$
$$= bg\, tg\, 1 - bg\, tg\, \varepsilon - bg\, tg \frac{1}{\delta} + bg\, tg \frac{\varepsilon}{\delta} =$$
$$= \tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\pi + bg\, tg \frac{\varepsilon}{\delta} = -\tfrac{1}{4}\pi + bg\, tg \frac{\varepsilon}{\delta},$$

$$I_2 = \int_\delta^1 \int_\varepsilon^1 \frac{\partial^2 bg\, tg \frac{y}{x}}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy =$$
$$= \int_\delta^1 \left(-\frac{1}{1+x^2} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} \right) dx =$$
$$= -\, bg\, tg\, 1 + bg\, tg\, \delta + bg\, tg \frac{1}{\varepsilon} - bg\, tg \frac{\delta}{\varepsilon} =$$
$$= -\tfrac{1}{4}\pi + \left(\tfrac{1}{2}\pi - bg\, tg \frac{\delta}{\varepsilon} \right) = -\tfrac{1}{4}\pi + bg\, tg \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Men ziet dus, dat de orde van integratie altijd mag verwisseld worden; en ook, dat deze integraal steeds een eindige en bepaalde waarde aanneemt, zelfs dan, wanneer men één van de grenzen òf δ òf ε gelijk aan nul neemt. Alleen voor het geval, dat men beide grenzen te gelijker tijd als nul aanneemt, wordt hare waarde onbepaald; en de reden hiervoor is zeer natuurlijk, omdat in dat geval de functie onder het integraalteeken zelf onbepaald wordt. Van het geval

($\varepsilon = 0$, $\delta = 0$) afgezien, in welk geval de integratie een onding is, vertoont de integraal alleen in dien zin een afwijking van de continuiteit, dat in de onmiddellijke nabijheid van de waarde ($x = 0$, $y = 0$) met een onbegrensd kleine aangroeiing van de veranderlijken niet altijd een onbegrensd kleine, maar soms een eindige aangroeiing van de integraal overeenkomt, en wij zien in dit feit een toenadering tot de latere en betere theorie van CAUCHY, op andere grondslagen opgebouwd. Wij zouden nu reeds kunnen zeggen, dat de integraal als een functie optreedt, die afhankelijk is van den weg, door het punt (x, y), om het punt $(0, 0)$ beschreven. Om het groote verschil in opvatting, dat er tusschen CAUCHY en mij bestaat, op een aanschouwelijke wijze te laten zien, ga ik over tot een meetkundige voorstelling.

Zij daartoe de plaats van een punt in een plat vlak bepaald door twee onafhankelijk veranderlijken x en y, gerekend in de richting van twee loodrecht op elkaar staande assen, dan komt met elk stelsel waarden van x en y de plaats van een punt in het plat vlak overeen. Men denke zich verder aan de plaats van elk punt de toebehoorende waarde eener functie van x en y verbonden, dan zal een beweging van een punt in het platte vlak het verloop van de overeenkomstige functie weergeven.

Nemen wij nu, als een bijzonder geval, voor deze functie de integraal

$$I = \int_y^1 \int_x^1 \frac{\partial^2 bg\, tg \frac{y}{x}}{\partial y \, \partial x} \, dx \, dy,$$

wanneer wij deze als een functie van hare benedenste grenzen beschouwen.

Zij O de oorsprong $(0, 0)$ en P de plaats van het punt $(1, 1)$, waar de waarde van de functie nul is, en dat de beginwaarde voorstelt. Zij verder Q het snijpunt van een rechte lijn met de Y-as, die uit P evenwijdig aan de X-as wordt getrokken en evenzoo R het snijpunt van een rechte lijn met de X-as, uit P evenwijdig aan de Y-as getrokken.

Volgens CAUCHY zal nu de functie in het punt O steeds een bepaalde waarde verkrijgen, wanneer de baan,

dien het punt beschrijft, om van (1, 1) tot (0, 0) te geraken, gegeven is.

Voor het bijzonder geval, dat het punt eerst de rechte lijn P Q en daarna Q O doorloopt, wat overeenkomt met een integratie, eerst naar x en daarna naar y wordt die waarde $\frac{1}{4}\pi$. Doorloopt het punt eerst de rechte lijn P R en daarna R O, dan zou die waarde $-\frac{1}{4}\pi$ worden.

Mijn beschouwing is daarentegen deze. De waarde van de functie, in het punt O, heeft geen beteekenis. In elk punt, op onbegrensd kleinen afstand van O gelegen, is die waarde echter volkomen en ondubbelzinnig bepaald en onafhankelijk van den doorloopen weg. Echter doet zich hierbij het merkwaardige geval voor, dat nu, met het beschrijven van een onbegrensd klein element ds van den weg, een eindige aangroeiing van de functie kan overeenkomen. Zoo zal, wanneer het punt een van de onbegrensd kleine wegen doorloopt, die men tusschen de punten $(\delta, 0)$ en $(0, \varepsilon)$ getrokken kan denken, de functie aangroeien van $-\frac{1}{4}\pi$ tot $\frac{1}{4}\pi$.

4. De complexe grootheden zijn nog op een andere wijze door Cauchy in de analyse ingevoerd, en dit had nog veel gewichtiger gevolgen. Om deze gevolgen te schetsen, is het noodig, het standpunt, dat men vóór zijn optreden innam, nader toe te lichten. In de reeks van Taylor had men, gedurende een geruimen tijd, een veelbelovend middel gezien om een willekeurige functie, door middel van een oneindige reeks, analytisch voor te stellen. De uitkomsten, hiermede verkregen, hadden echter niet aan de hooggespannen verwachtingen beantwoord. Wel was het mogelijk gebleken op die wijze de reeksontwikkeling van sommige functiën, zooals e^x, $\sin x$ en $\cos x$, op een eenvoudige wijze af te leiden; maar zelfs deze uitkomsten kon men niet als nieuw aanmerken, daar ze reeds door grensovergang, met behulp van het binomium van Newton, verkregen waren. Nieuwe uitkomsten waren er in het geheel niet mede verkregen en, naar aanleiding van het probleem van de trillende snaren, waren er ernstige bezwaren gerezen, of die reeks wel geschikt was om een willekeurige functie voor te stellen. Toch bleef men, voor de toekomst, nog veel van die reeks in dat opzicht

verwachten, en kenschetsend is het voor den rol, aan die reeks nog in den aanvang van deze eeuw toegedacht, dat LAGRANGE, in zijn »Théorie des fonctions analytiques", à priori tracht aan te toonen, dat een willekeurige functie, van eenige bijzondere waarden afgezien, in het algemeen niet anders in een reeks ontwikkeld kan worden dan volgens de opklimmende machten van de veranderlijke. De heldere en bondige wijze, waarop de grootste wiskundige van zijn tijd zijn denkbeelden uiteenzet, doet tevens duidelijk uitkomen, hoe laag het standpunt was, dat de analyse destijds in dat opzicht innam. Hij redeneert aldus.

Een ontwikkeling van $f(a+x)$, die negatieve machten van x bevat, leidt tot een ongerijmdheid, omdat die ontwikkeling voor alle waarden van x geldt, en dus ook voor $x=0$. In dat geval wordt echter het eerste lid van de gelijkheid eindig en het tweede lid oneindig.

Bevat die ontwikkeling gebroken machten van x, dan is het tweede, volgens de theorie van de vergelijkingen, meerwaardig, terwijl het eerste lid éénwaardig is. Dit voert dus op nieuw tot een ongerijmdheid.

Bij zijn onderzoek naar de reden, waarom de reeks, voor bijzondere waarden van de veranderlijke, niet doorgaat, doet hij echter een opmerking, die het karakter van een functie in de vertakkingspunten op de juiste wijze weergeeft. Wanneer een bijzondere waarde van x een rationeelen factor doet verdwijnen, heeft dit geen invloed op den aard van de reeksontwikkeling, omdat de wortelvorm dan toch in de volgende differentiaalquotienten behouden blijft. Verdwijnt echter een factor onder het wortelteeken, voor een bijzondere waarde van x, dan is dit wel van invloed, omdat daaronder ook alle volgende differentiaalquotienten verdwijnen; en dan moet er een ontwikkeling bestaan, waarbij de aangroeiing zelf met het wortelteeken voorzien is. Hij licht verder zijn zienswijze toe bij de functie

$$y=(x-a)\sqrt{(x-b)};$$

maar dit voorbeeld is voor de theorie te onbeduidend geweest, om hem den verderen weg te kunnen aanwijzen.

De groote misvatting van LAGRANGE is, dat hij tot grond-

slag van zijn beschouwing aanneemt, dat dezelfde reeksontwikkeling voor **alle** waarden van de veranderlijke geldt; terwijl het reeds bij de toepassing op sommige eenvoudige functiën, zooals $\frac{1}{1+x}$, blijkt, dat dit niet het geval is. Men miste echter elk middel, om à priori te beslissen, wanneer die toepassing àl dan niet bruikbaar was. Om hierin zoo goed mogelijk te voorzien, zocht men de rest van die reeks te bepalen — en verschillende groote wiskundigen zijn hierin meer of minder volkomen geslaagd — voor het geval, dat de functie in een ontwikkelden vorm gegeven is. Dan toch kan men door herhaald differentieeren de grenzen bepalen, binnen welke de waarde van de veranderlijke moet blijven, om aan de rest een bepaalde en eindige waarde te geven; maar door dit differentieeren wordt, in het algemeen, deze rest hoe langer hoe meer samengesteld. Was de functie ingewikkeld gegeven, dan trachtte men andere reeksontwikkelingen af te leiden, zooals de reeks van Lagrange, toepasselijk, wanneer de vorm, waardoor die functie bepaald was, een bepaalde gedaante had. De onzekerheid van de toepassing was nu echter nog toegenomen, omdat men nu niet alleen bepalen moest, wanneer die nieuwe reeks convergeerde; maar er een tweede bron van onzekerheid hierdoor ontstond, dat men naliet te bewijzen, dat de nieuwe reeks, ook wanneer zij convergeerde, nog steeds dezelfde functie bleef voorstellen.

5. Aan Cauchy komt de onsterfelijke verdienste toe, dat hij een eenvoudig kenmerk gevonden heeft, waardoor men **algemeen** beslissen kan wanneer de reeks van Taylor al dan niet kan worden toegepast. Aanleiding hiertoe gaf zijn poging, om de berekeningen in de theorie der storingen te bekorten, die, zooals Plana hem zeide, jaren werks vereischten. De verbeteringen, die hij hierin aanbracht, en zijn streven om te bepalen, wanneer de reeks van Taylor de analytische uitdrukking kon zijn van een integraal van een differentiaalvergelijking, brachten hem tot de ontdekking van het algemeene kenmerk, dat hij in 1837 in een brief aan Coriolis op de volgende wijze formuleerde.

Een willekeurige functie van een complexe veranderlijke

x kan altijd ontwikkeld worden volgens de reeks van MAC-LAURIN, zoolang de modulus van x een waarde behoudt, die kleiner is dan die, waarvoor de functie of haar eerste afgeleide oneindig of discontinue wordt.

Het bewijs van dit beginsel gaf hij in 1839 in de Comptes Rendus IX en de wijze waarop hij dit bewijs leverde, geeft een duidelijk inzicht in het eigenaardige van zijn wijze van behandeling gedurende dit tijdperk van zijn wetenschappelijken loopbaan. Om die reden wil ik den gang van dit bewijs weergeven, en, zooals zal blijken, speelt daarin de eigenschap, dat men bij een dubbelintegraal de orde van integratie mag verwisselen, een voorname rol.

Zij
$$z = \rho\, e^{\Phi i}\,, \qquad (1)$$
$$e^{\Phi i} f'(\rho\, e^{\Phi i}) = \psi(\rho, \Phi) + i\,\chi(\rho, \Phi), \qquad (2)$$
waarin ψ en χ reëele functies voorstellen van ρ en Φ, dan volgt tevens de betrekking
$$e^{-\Phi i} f'(\rho\, e^{-\Phi i}) = \psi(\rho, \Phi) - i\,\chi(\rho, \Phi). \qquad (3)$$
Voor $\psi(\rho, \Phi)$ en $\chi(\rho, \Phi)$ vindt men dan de waarden
$$\psi(\rho, \Phi) = \frac{1}{2}\left\{e^{\Phi i} f'(\rho\, e^{\Phi i}) + e^{-\Phi i} f'(\rho\, e^{-\Phi i})\right\}, \qquad (4)$$
$$\chi(\rho, \Phi) = \frac{1}{2\,i}\left\{e^{\Phi i} f'(\rho\, e^{\Phi i}) - e^{-\Phi i} f'(\rho\, e^{-\Phi i})\right\} \qquad (5)$$
Neemt men nu aan, dat ρ alleen waarden verkrijgt, die kleiner zijn dan die, waarvoor $f(z)$ of $f'(z)$ oneindig of discontinue worden, zoo is dit ook het geval met $\psi(\rho, \Phi)$ en $\chi(\rho, \Phi)$, en dus ook met de dubbelintegralen
$$\int_0^\rho \int_0^{2\pi} \psi(\rho, \Phi)\, d\rho\, d\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\rho \psi(\rho, \Phi)\, d\Phi\, d\rho,$$
$$\int_0^\rho \int_0^{2\pi} \chi(\rho, \Phi)\, d\rho\, d\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\rho \chi(\rho, \Phi)\, d\Phi\, d\rho.$$
Uit (2) volgt dan, dat ook de dubbelintegraal
$$\int_0^\rho \int_0^{2\pi} e^{\Phi i} f'(z)\, d\rho\, d\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\rho e^{\Phi i} f'(z)\, d\Phi\, d\rho\ . \qquad (6)$$
steeds een eindige en bepaalde waarde behoudt.

Verder heeft men
$$\frac{\partial f(z)}{\partial \rho} = f'(z)\frac{\partial z}{\partial \rho} = e^{\Phi i} f'(z),$$
$$\frac{\partial f(z)}{\partial \Phi} = f'(z)\frac{\partial z}{\partial \Phi} = i\,\rho\, e^{\Phi i} f'(z);$$

en bij substitutie van deze waarden gaat (6) over in

$$\int_0^{\rho} \frac{d\rho}{i\rho} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f(z)}{\partial \Phi} d\Phi = \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{\rho} \frac{\partial f(z)}{\partial \rho} d\rho . . . (7)$$

Daar wij nu aangenomen hebben, dat $f(z)$ en $f'(z)$ voor alle waarden van ρ, tusschen 0 en ρ gelegen, eindig en continue blijven, heeft men

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial f(z)}{\partial \Phi} d\Phi = 0,$$

$$\int_0^{\rho} \frac{\partial f(z)}{\partial \rho} d\rho = f(z) - f(0);$$

waardoor (7) overgaat in

$$\int_0^{2\pi} \{f(z) - f(0)\} d\Phi = 0,$$

zoodat

$$\int_0^{2\pi} f(z) d\Phi = \int_0^{2\pi} f(0) d\Phi = 2\pi f(0) . . . . (8)$$

Wanneer men nu x alleen waarden laat aannemen, wier moduli kleiner zijn dan ρ (de modulus van z) dan stelt

$$F(z) = z \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

een functie voor, die eveneens aan de vereischte voorwaarden voldoet, en dus is ook op deze de betrekking (8) toepasselijk. Bovendien voldoet zij aan de bijzondere voorwaarde

$$F(0) = 0,$$

daar $\frac{f(z) - f(x)}{z - x}$, voor $z = 0$, overgaat in $f'(0)$, en wij aangenomen hebben, dat deze waarde eindig en bepaald is.

Hieruit volgt

$$\int_0^{2\pi} F(z) d\Phi = 0,$$

of

$$\int_0^{2\pi} \frac{z f(z)}{z - x} d\Phi = \int_0^{2\pi} \frac{z f(x)}{z - x} d\Phi = f(x) \int_0^{2\pi} \frac{z}{z - x} d\Phi . (9)$$

Tengevolge van onze aanname, *mod* $x <$ *mod* z, kan $\frac{z}{z - x} = \frac{1}{1 - \frac{x}{z}}$ in een reeks ontwikkeld worden, volgens de klimmende machten van x, zoodat

$$\int_0^{2\pi} \frac{z}{z-x}\, d\Phi = \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{x}{z} + \frac{x^2}{z^2} \ldots + \frac{x^q}{z^q} \ldots\right) d\Phi.$$

Nu heeft men algemeen

$$\int_0^{2\pi} \frac{x^q}{z^q}\, d\Phi = x^q \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^q} e^{q\Phi i}\, d\Phi = -\frac{x^q}{q\rho^q i}(e^{-2\pi i q} - 1) = 0\,,$$

waardoor (9) overgaat in

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z f(z)}{z-x}\, d\Phi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{x}{z} + \frac{x^2}{z^2} \ldots + \frac{x^q}{z^q} \ldots\right) f(z)\, d\Phi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} f(z) d\Phi + x \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{z} d\Phi + x^2 \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{z^2} d\Phi \ldots \right\}. \quad (10)$$

Deze uitdrukking stelt dus een reeksontwikkeling volgens de klimmende machten van x voor, binnen den cirkel van convergentie, die ρ tot straal heeft; en men kan nog ten overvloede bewijzen, dat de bepaalde integralen, die hier als coëfficienten van de verschillende machten van x optreden, volkomen overeenstemmen met de overeenkomstige coëfficienten in de reeks van Maclaurin. Uit de betrekking (8) blijkt dit terstond voor de eerste van die coëfficienten.

Daar de uitbreiding van dit kenmerk tot de reeks van Taylor gemakkelijk is en niet tot nieuwe gezichtspunten aanleiding geeft, wil ik hierbij niet langer stilstaan, maar de gevolgen, door toepassing op een eenvoudig voorbeeld, laten zien.

6. Nemen wij de functie

$$y = \frac{1}{1+x}\,,$$

dan wordt deze oneindig voor $x = -1$, dus voor $mod\, x = 1$, en daarom is hier de reeks van Maclaurin alleen van kracht binnen een cirkel van convergentie, die het nulpunt tot middelpunt en de eenheid tot straal heeft. Nemen wij nu een waarde $x = a$, zoodanig dat $mod\, a > 1$, en vragen wij het gebied te bepalen, waarbinnen de reeksontwikkeling van de gegeven functie in de omgeving van die waarde van kracht blijft. De oplossing hiervan is ook gemakkelijk. Beschrijft men toch, uit a als middelpunt, een cirkel, die tot straal heeft den afstand van dit pnnt tot het punt -1,

dan is deze de cirkel van convergentie, waarbinnen dezelfde reeks blijft doorgaan. Praktisch is het nu ook gemakkelijk deze reeksontwikkeling op de volgende wijze te bepalen

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{a+1+x-a}=\frac{1}{a+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-a}{a+1}}=$$

$$=\frac{1}{a+1}\left\{1-\frac{x-1}{a+1}+\left(\frac{x-a}{a+1}\right)^2-\left(\frac{x-a}{a+1}\right)^3\cdots\right\}$$

Men ziet terstond in, dat deze ontwikkeling aan het vereischte kenmerk voldoet, daar

$$a+1=a-(-1),$$

en volgens onze vooronderstelling

$$mod\,(x-a)<mod\,\{a-(-1)\},$$

dus

$$\frac{mod\,(x-a)}{mod\,(a+1)}=mod\,\frac{x-a}{a+1}<1.$$

Bij de toepassing van dit beginsel op ingewikkelde functiën, geeft Cauchy in beginsel aan op welke wijze men, van de reeksontwikkeling in een bepaald punt $x=a$ uitgaande, tot de waarde van die functie in elk ander punt kan geraken, mits die functie in dat punt, zoowel als haar eerste differentiaalquotient, eindig en bepaald is. Dit blijkt uit brieven, door hem in 1837 aan Libri geschreven, en die tot doel hebben, op die wijze de wortels van een vergelijking te bepalen voor het geval, dat die wortels niet meervoudig voorkomen. Puiseux heeft echter dit beginsel klaar en helder uiteengezet.

Nemen wij aan, dat men de reeksontwikkeling voor een waarde $x=a$ kent; maar dat men de waarde van de functie voor $x=p$ wenscht te kennen.

De reeks in het punt $x=a$ geldt nu binnen een convergentiecirkel C_1, die reikt tot aan het naastbij gelegen discontinuiteits- of vertakkingspunt. Ligt nu $x=p$ binnen dien cirkel, zoo is de waarde van de functie in dat punt door die reeks reeds dadelijk bekend. Is dit echter niet het geval, zoo neemt men een ander willekeurig punt binnen C_1, waarvan men nu weer de reeksontwikkeling bepaalt, en die wederom geldt tot aan het naastbij gelegen punt, waarvoor de functie

of haar eerste afgeleide ophoudt continue te zijn. Men ziet, dat men op deze wijze, met vermijding van alle bijzondere punten, alle andere punten kan bereiken.

Weierstrass noemt deze reeksontwikkelingen *Potenzreihen* en een functie analytisch binnen het gebied, waarvoor deze ontwikkelingen gelden. Men ziet dat zijne beschouwing, om een functie te bepalen als het inbegrip van al hare Potenzreihen, in den grond der zaak niets nieuws bevat en een vrucht van franschen bodem is.

7. Te gelijkertijd met de ontwikkeling van de zoo pas beschreven theorie en daarmede ongeveer gelijken tred houdend, had Cauchy een tweede ontwikkeling van een willekeurige functie aangegeven, namelijk volgens de afdalende machten van de veranderlijke. In zijn brieven aan Libri in 1837 geeft hij ook van deze ontwikkeling de ware grenzen aan, en zegt, dat ze gelden voor alle waarden van x, die grooter zijn dan die, waarvoor de functie of haar eerste afgeleide oneindig of discontinue wordt.

Zoo zal de functie

$$y = \frac{1}{1+x}$$

ontwikkeld kunnen worden volgens de klimmende machten van $\frac{1}{x}$, zoolang $mod\ x > 1$, en wanneer we, in een punt $x = a$, waarbij $mod\ a > 1$, deze reeksontwikkeling beschouwen, geldt zij binnen een cirkel van convergentie, uit a als middelpunt met een straal beschreven, die bepaald wordt door de voorwaarde, dat steeds

$$mod\,(x-a) > mod\,\{a-(-1)\}$$

moet zijn.

Ook deze ontwikkeling kan men gemakkelijk op de volgende wijze bepalen.

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{x-a+a+1} = \frac{1}{x-a} \cdot \frac{1}{1+\frac{a+1}{x-a}} =$$

$$= \frac{1}{x-a} - \frac{a+1}{(x-a)^2} + \frac{(a+1)^2}{(x-a)^3} - \frac{(a+1)^3}{(x-a)^4} + \ldots$$

Laurent, een kapitein van de genie, heeft in 1843 de

analyse een belangrijke schrede doen vooruitgaan, met de ontdekking van een reeksontwikkeling, die van een algemeenen aard is en de beide zoo pas beschreven ontwikkelingen als bijzondere gevallen in zich sluit.

Cauchy heeft in 1844, in zijn »Mémoire sur les fonctions continues", C. R. XVIII, getracht deze ontwikkeling af te leiden. Zijn bewijs is echter onvolledig; maar kan, in den geest van zijn eigen methode, op de volgende wijze worden aangevuld.

Neemt men aan, dat $f(z)$ en $f'(z)$ beiden eindig en continue zijn voor alle waarden van den modulus ρ van z tusschen r en R, dan komt men, op volkomen dezelfde wijze redenerende als in § 5, tot de betrekking

$$\int_r^R \frac{d\rho}{i\rho} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f(r)}{\partial \Phi} \partial \Phi = \int_0^{2\pi} d\Phi \int_r^R \frac{\partial f(r)}{\partial \rho} d\rho \quad . \; . \; . \; (1)$$

Men heeft nu in dit geval

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial f(z)}{\partial \Phi} d\Phi = 0,$$

$$\int_r^R \frac{\partial f(z)}{\partial \rho} d\rho = f(v) - f(w),$$

als v een van de waarden van z voorstelt, waarbij $mod\, z = R$, en w een van de waarden, waarbij $mod\, z = r$.

Hierdoor gaat (1) over in

$$\int_0^{2\pi} \{f(v) - f(w)\}\, d\Phi = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Neemt men nu aan, dat x een grootheid is, zoodanig dat steeds

$$r < mod\, x < R,$$

dan zal, onder die voorwaarden, wederom

$$F(z) = z \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

een functie van z zijn, die ook aan de betrekking (2) voldoet; zoodat

$$\int_0^{2\pi} F(v)\, d\Phi - \int_0^{2\pi} F(w)\, d\Phi = 0,$$

of

$$\int_0^{2\pi} v \frac{f(v) - f(x)}{v - x} d\Phi - \int_0^{2\pi} w \frac{f(w) - f(x)}{w - x} d\Phi = 0 \, . \quad (3)$$

Daar nu $mod\, x < mod\, v$, kan $\frac{v}{v-x}$ ontwikkeld worden volgens de klimmende machten van x, en daar $mod\, x > mod\, w$, kan $\frac{w-x}{w}$ ontwikkeld worden volgens de klimmende machten van $\frac{1}{x}$. Bij herleiding vindt men dan

$$\int_0^{2\pi} \frac{v f(v)}{v-x}\, d\Phi = \int_0^{2\pi} \frac{f(v)}{1-\frac{x}{v}}\, d\Phi =$$

$$= \int_0^{2\pi} f(v)\, d\Phi + x \int_0^{2\pi} \frac{f(v)}{v}\, d\Phi + x^2 \int_0^{2\pi} \frac{f(v)}{v^2} \ldots.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{v f(x)}{v-x}\, d\Phi = f(x) \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-\frac{x}{v}}\, d\Phi =$$

$$= f(x) \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{x}{v} + \frac{x^2}{v^2} + \frac{x^3}{v^3} \ldots.\right) d\Phi = 2\pi f(x),$$

daar wederom

$$\int_0^{2\pi} \frac{x^q}{v^q}\, d\Phi = 0;$$

$$-\int_0^{2\pi} w \frac{f(w)}{w-x}\, d\Phi = \frac{1}{x} \int_0^{2\pi} \frac{w f(w)}{1-\frac{w}{x}}\, d\Phi =$$

$$= \frac{1}{x} \int_0^{2\pi} w f(w)\, d\Phi + \frac{1}{x^2} \int_0^{2\pi} w^2 f(w)\, d\Phi + \frac{1}{x^3} \int_0^{2\pi} w^3 f(w)\, d\Phi \ldots.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{w f(x)}{w-x}\, d\Phi = -\frac{f(x)}{x} \int_0^{2\pi} \frac{w}{1-\frac{w}{x}}\, d\Phi =$$

$$= -\frac{f(x)}{x} \int_0^{2\pi} \left(w + \frac{w^2}{x} + \frac{w^3}{x^2} + \frac{w^4}{x^3} \ldots.\right) d\Phi = 0,$$

daar wederom algemeen

$$\int_0^{2\pi} \frac{w^{q+1}}{x^q}\, d\Phi = 0.$$

Bij substitutie van deze waarden in (3) verkrijgt men de reeks van LAURENT.

8. Het jaar 1846 vormt een keerpunt in de wetenschappelijke loopbaan van CAUCHY. Een consequente voortzetting van dezelfde methode, die hij tot dusver steeds had aange-

wend, zou hem, zooals ik heb aangetoond, op een natuurlijke wijze tot het theorema van LAURENT hebben geleid; en het schijnt vreemd, dat dit niet het geval is geweest. Men kan hiervoor echter een natuurlijke verklaring vinden in de redenen, die hem de reeksontwikkeling van TAYLOR deden zoeken.

In het tijdvak 1831—1835 had hij te Turijn en Praag onderzoekingen in het licht gegeven, die over verschillende onderwerpen handelden, zooals de theorie van de storingen; en zijn wiskundige theorie van het licht en het onderzoek naar de convergentie van de reeksen, die hij daarbij aantrof, had hem tot de innerlijke overtuiging van het bestaan van zijn kenmerk van convergentie geleid. Hij gevoelde het groote gewicht van dit beginsel en sprak dit sedert herhaaldelijk uit, in tal van brieven en verhandelingen; maar het duurde eenige jaren, eer hij er in slaagde een rechtstreeksch bewijs voor te vinden. In 1839 slaagde hij; zijn doel was dus bereikt, wat hem over het hoofd deed zien, dat de gevolgde methode nog andere gewichtige uitkomsten aan het licht kon brengen.

Zonderling is het echter, dat hij dit verband niet volkomen meester werd, nadat de reeks van LAURENT was bekend geworden. Hij vond echter den kern van een nieuwe theorie van grooteren omvang, volgens andere beginselen afgeleid, waaruit de voorafgaande als een bijzonder geval kan worden afgeleid; en gaf dit in het licht in de verhandelingen: »Sur les intégrales, qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée" en »Mémoire sur les intégrales, dans lesquelles la fonction sous le signe $\int$ change brusquement de valeur", die in de comptes Rendus XXIII van 1846 voorkomen.

De plaats van een punt P wordt afhankelijk gedacht van een stelsel geheel willekeurige coördinaten

$$x,\ y,\ z, \ldots . (a),$$

die met de plaats van dat punt op een continue wijze veranderen. Beschouwt men nu s als den boog van een willekeurige gesloten kromme lijn C, die een gedeelte S van een willekeurig oppervlak begrenst, dan wordt f als een willekeurige functie van s en de grootheden (a) aangenomen.

Zij verder I_C de waarde, die de integraal $\int f\,d\,s$ verkrijgt, als het punt P den omtrek C doorloopt en daarna op zijn vorige standplaats terugkeert.

Verdeelt men nu S zoodanig in stukken, dat

$$S = \sum_{\nu=1}^{n} S_\nu,$$

en noemt men C_ν de omtrekken van de kromme lijnen, die de overeenkomstige stukken S_ν begrenzen, dan heeft men steeds

$$I_C = \sum_{\nu=1}^{n} I_{C_\nu}.$$

Wanneer men nu daarenboven aanneemt, dat

$$f = X\frac{\partial x}{\partial s} + Y\frac{\partial y}{\partial s} + Z\frac{\partial z}{\partial s} + \ldots.,$$

en

$$X\,d\,x + Y\,d\,y + Z\,d\,z + \ldots.$$

een volledige differentiaal is, dan is steeds

$$I_C = 0,$$

als S en C geen bijzondere punten bevatten.

Bevinden zich echter, binnen S, bijzondere punten, die wij met willekeurige, onbegrensd kleine, gesloten omtrekken c_μ omgeven, zoo is steeds

$$I_C = \sum_{\mu=1}^{m} I_{C_\mu}.$$

Ik wil bij het bewijs van deze eigenschappen — dat, in beginsel, in alle leerboeken voorkomt, die over dit gedeelte van de analyse handelen — niet stilstaan. Alleen wil ik opmerken, dat Cauchy, uitgaande van de betrekkingen

$$f = X\frac{\partial x}{\partial y} + Y\frac{\partial y}{\partial x},$$

$$I = \int\!\!\int\left(\frac{\partial X}{\partial s} - \frac{\partial Y}{\partial s}\right) d\,x\,d\,y,$$

in beginsel het bewijs van het eerste gedeelte van deze eigenschap gaf, dat men later aan Riemann toeschreef; en dat Puiseux het bewijs voor de reeksontwikkelingen van

TAYLOR en LAURENT zoodanig uit het theorema van CAUCHY afleidde, als men dit thans in de leerboeken pleegt te doen.

Naar de meetkundige voorstelling, zou men de reeks van TAYLOR de ontwikkeling van een continue functie binnen een cirkel kunnen noemen, en die van LAURENT binnen het oppervlak, dat begrensd wordt door twee concentrische cirkels. Men kan op die wijze voortgaan en zich afvragen, wat de reeksontwikkeling zal worden binnen een oppervlakte, begrensd door andere kromme lijnen. PUISEUX heeft het eerst deze onderzoekingen ingeleid, die, onder de handen van de tegenwoordige baanbrekers van de wetenschap, een grooten omvang hebben verkregen, nadat RIEMANN een nieuw gezichtspunt in dezen had geopend, uiterst geniaal bedacht en van onafzienbare gevolgen.

Nog een ander punt van onderzoek ligt hier onmiddellijk voor de hand, wat er namelijk wordt van de bepaalde integralen Ic_{μ} — die over den omtrek van onbegrensd kleine gesloten kromme lijnen genomen worden — bij die punten, waar de functie of haar eerste afgeleide oneindig of discontinue wordt. Maar ook dit onderzoek ligt buiten het plan, dat ik mij heb afgebakend. Het behoort bij de studie van de integralen der functiën, waarvoor ik uw aandacht thans vraag. Deze zijn de stelkundige functiën, wier algemeen karakter daarin bestaat, dat ze voor elke waarde van de veranderlijke een eindig aantal waarden gelijktijdig hebben, waarom ik ze, in navolging van de Duitschers, *meerduidend* zal noemen; terwijl het eigenaardige van haar bouw bepaald wordt door de *vertakkingspunten*, namelijk die punten, waar twee of meer waarden van de functie gelijk worden voor dezelfde waarde van de veranderlijke.

9. Oorspronkelijk noemde men een functie stelkundig, wanneer zij verkregen werd door de zes hoofdbewerkingen van de stelkunde een eindig aantal malen toe te passen. Later werd die naam gegeven aan de functie, bepaald door een vergelijking

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} \dots + a_{n-1} y + a_n = 0 , \quad \dots \quad (A)$$

waarin de a's rationeele functiën zijn van de veranderlijke x. Deze opvatting heb ik voor het eerst aangetroffen in de ver-

handeling van Liouville »sur la classification des transcendantes." Journal de Liouville. II 1837.

Abel had bij zijn verschillende onderzoekingen herhaaldelijk van dergelijke vergelijkingen gebruik gemaakt; maar hij heeft aan een stelkundige functie nooit een andere beteekenis gehecht dan die, welke in den boven beschreven zin beperkt is. Men moet dit toeschrijven aan het eigenaardig gebruik, dat hij steeds van die vergelijkingen maakte, en waardoor hij nooit hare wortels afzonderlijk, maar steeds symetrische functiën van die wortels beschouwde, die, zooals men weet, rationeele functiën van de coëfficienten, en dus ook van de andere veranderlijke, zijn. Alleen dan, wanneer ze konden worden uitgedrukt door een stelkundige functie in den beperkten zin, beschouwde hij die wortels afzonderlijk.

Twee eigenschappen, die na de verhandelingen van Abel onmiddellijk voor de hand lagen, vond men reeds spoedig.

Vooreerst, dat de stelkundige functiën een afgesloten groep van functiën vormen.

Als namelijk y bepaald is door de vergelijking (A) en x door

$$b_0\, x^p + b_1\, x^{p-1} \ldots . + b_{p-1}\, x + b_p = 0\,,$$

waarin de b's weer geheele en rationeele functiën zijn van z, is ook y een stelkundige functie van z.

De tweede eigenschap heeft betrekking op het geval, dat de vergelijking (A) onherleidbaar is. Dan bestaat er overeenkomst met hetzelfde geval bij gewone vergelijkingen.

Overigens wist men echter niets aangaande de natuur van die functies. Zoo stelde men het zich als mogelijk voor, uit de stelkundige functiën de middelen af te leiden, om de wortels van gewone vergelijkingen met behulp van de reeds bekende functiën te bepalen. Aan deze verwachting werd de bodem ingeslagen door de analyse van Liouville in zijn »classification des transcendantes" in het licht gegeven, en waar hij de eenvoudigste bekende functiën aan een onderzoek onderwierp. Hij bewees niet alleen, dat er geen enkele stelkundige functie bestaat, die voorgesteld kan worden door een logarithmische, exponentieele, goniometrische of cyclometrische functie; maar dat dit ook niet het geval kan zijn met een

van de functies x^α of x^x, wanneer α een irrationeele of complexe grootheid is. Deze uitkomst, hoewel van een negatieven aard, gaf althans een duidelijke vingerwijzing in welke richting er niet moest gezocht worden, en deed veel nutteloos werk besparen.

Bij dergelijke onderzoekingen was de tweede veranderlijke, meer als een *parameter* beschouwd, ingevoerd met het doel om, door een praktische keuze van hare verandering, aan de vergelijking een gedaante te geven, waardoor het bepalen van de wortels vereenvoudigd kon worden. Nog sterker komt dit uit bij Cauchy, die, van ditzelfde denkbeeld uitgaande, tot de beschouwing van stelkundige functiën werd geleid.

Laplace had een verhandeling geschreven over de convergentie van de reeks, die bij een elliptische baan den voerstraal als functie van de excentriciteit bepaalt. Zooals ik reeds boven meldde, was het onderzoek naar de convergentie van deze reeks voor Cauchy de aanleiding, om naar een algemeen kenmerk voor de convergentie te zoeken. Hij paste nu het door hem ontdekte kenmerk toe op de reeksontwikkelingen van de wortels eener vergelijking, als hij deze als functiën van een willekeurigen parameter beschouwde, zooals uit zijn verhandeling van Turijn in 1831 en zijn brieven aan Libri in 1837 blijkt; en kwam op die wijze tot stelkundige functiën, hoewel niet de meest algemeene. In alle onderzoekingen gedurende dit tijdvak van zijn loopbaan had hij echter steeds de vertakkingspunten zooveel mogelijk vermeden; en, waar hij ze te pas brengt, is zijn beschouwing duister en verward. Eerst in 1844, in zijn »Mémoire sur les fonctions continues", geeft hij een paar eenvoudige voorbeelden aan, waarbij hij de veranderlijke van de functie, bij een omloop om een vertakkingspunt, op de juiste wijze voorstelt. Hij laat zien, dat — wanneer een functie y bepaald is door een van de vergelijkingen

$$e^y = x = \rho\, e^{\Phi i} \text{ of } y^m = x = \rho\, e^{\Phi i},$$

zoodat

$$y = l\,p + \Phi\, i \text{ of } y = \rho^{\frac{1}{m}}\, e^{\frac{\Phi i}{m}},$$

— bij een omloop van x om het vertakkingspunt, de waarde

van de functie verandert, en wel in het eerste geval met $2\pi i$, en in het tweede met den factor $e^{\frac{2i\pi}{m}}$.

Cauchy tracht verder, in deze verhandeling, nog een zoodanige uitbreiding aan de reeks van Laurent te geven, dat ook de vertakkingspunten in de beschouwing optreden, en voert met dit doel dezelfde verbetering in, waartoe hij bij de beschouwing van de dubbelintegralen geraakt was. Het komt hierbij duidelijk uit, hoe hier juist de invoering van die verbetering hem den verderen draad doet verliezen, zoodat de verdere behandeling niets vanbelang oplevert; en het is waarschijnlijk, dat deze moeielijkheden er hem toe gebracht hebben, de oude methode te verlaten en een nieuwen weg te zoeken.

Alvorens van Cauchy af te stappen, wil ik nog terloops aangeven, dat ik bij hem de oplossing van een moeilijkheid gevonden heb, waarop ik in mijn dissertatie gewezen heb. Zooals ik aldaar bewees, berust de wijze, waarop Jacobi de studie van de Abelsche functies heeft ingeleid, op een ernstige fout, die voortkwam uit een verkeerde verklaring van uitkomsten, door Abel in een van zijn werken verkregen. Het was mij toen gebleken, dat Hermite, Richelot en andere wiskundigen van naam, bij hun verdere onderzoekingen, diezelfde fout onveranderd hadden overgenomen. Later bleek het mij, dat Eisenstein, in deel XXVII van Crelle's Journal het onjuiste van deze theorie had gevoeld, wat hem zoo ernstig voorkwam, dat hij de verdere studie in die richting opgaf. Ik was daarom zeer verbaasd, toen ik in Clebsch en Gordan, »Theorie der Abelschen Functionen" 1866 en Neumann, »Theorie der Abelschen Integrale" 1884, onder de benaming van »das Jacobische Umkehrproblem", den overgang tot die functiën op een wijze verbeterd zag, die aan de gestrengste eischen van de logica voldoet. Bij het doorloopen van verschillende stukken van Cauchy, die over Abelsche integralen handelen, was het mij reeds gebleken, dat hij tengevolge van de methode, hierin door hem gevolgd, weinig gevaar liep op dezelfde klip te stranden. Toen nu, na de inzage van de bezwaren van Eisenstein, zijn aandacht op die moeilijkheid was gevestigd, gaf hij in zijn »Considérations

nouvelles sur les intégrales définies, qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée". C. R. XXIII, 1846, de middelen aan, om deze fout te verbeteren.

10. PUISEUX was de eerste, die opgespoord heeft, op welke wijze de verschillende takken van een willekeurige stelkundige functie in elkaar overgaan, en de reeksontwikkelingen van die functie in de vertakkingspunten heeft bepaald. Men vindt de beschrijving van zijn methode in zijn »Recherches sur les fonctions algébriques". Journal de Liouville, XV, 1850.

Met behulp van variatierekening toont hij eerst aan, dat, bij een continue beweging van x, die geen polen of vertakkingspunten insluit, geen van de takken y_ν een waarde kan verkrijgen, die voor de overeenkomstige waarde van x tot een van de andere takken behoort, en dat diezelfde eigenschap geldt voor de integraal $\int_c^z y_\nu \, dx$.

Vervolgens laat hij zien, hoe bij de functie, bepaald door de betrekking

$$y^2 - x = 0,$$

de beide takken bij een cirkelomloop om het vertakkingspunt in elkaar overgaan, en daarna beschouwt hij het algemeene geval.

Zij y bepaald door de vergelijking

$$f(x, y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} \dots + a_{n-1} y + a_n = 0, \quad . \quad (A)$$

waarin de a's geheele en rationeele functiën zijn van x, en zij verder de vergelijking (A) onherleidbaar.

De vertakkingswaarden verkrijgt men dan als de wortels van de vergelijking, die ontstaat door eliminatie van y uit

$$f(x, y) = 0 \text{ en } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Noemt men nu (y_0, x_0) een stelsel overeenkomstige beginwaarden van y en x, zoo krijgt men, bij ontwikkeling van het eerste lid van (A) volgens de reeks van TAYLOR,

$$f(y, x) = f_0 + \left\{ (y - y_0) \frac{\partial f_0}{\partial x} + (x - x_0) \frac{\partial f_0}{\partial x} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{1.2} \left\{ (y - y_0)^2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} + 2 (y - y_0)(x - x_0) \frac{\partial^2 f_0}{\partial y \, \partial x} + (x - x_0)^2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} \right\} +$$

$$+\frac{1}{1.2.3}\left\{(y-y_0)^3\frac{\partial^3 f_0}{\partial y^3}+3(y-y_0)^2(x-x_0)\frac{\partial^3 f_0}{\partial y^2\,\partial x}+\right.$$

$$\left.+3(y-y_0)(x-x_0)^2\frac{\partial^3 f_0}{\partial y\,\partial x^2}+(x-x_0)^3\frac{\partial^3 f_0}{\partial x^3}\right\}+$$

$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;+$$

$$+\frac{1}{1p-1/1}\sum_{\nu=0}^{p-1}\binom{p-1}{\nu}(y-y_0)^{p-1-\nu}(x-x_0)^{\nu}\frac{\partial^{p-1} f_0}{\partial y^{p-1-\nu}\,\partial x^{\nu}}+$$

$$+\frac{1}{1p/1}\sum_{\nu=0}^{p}\binom{p}{\nu}(y-y_0)^{p-\nu}(x-x_0)^{\nu}\frac{\partial^{p} f_0}{\partial y^{p-\nu}\,\partial x^{\nu}}+$$

$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;=0,\;.\;.\;.\;.\;(B)$$

waarbij ik kortheidshalve $\dfrac{\partial^p f_0}{\partial x^{p-\nu}\,\partial y^{\nu}}$ gezet heb voor de waarde, die het differentiaalquotient aanneemt, voor $y=y_0$ en $x=x_0$.

Als nu (A), voor $x=x_0$, p gelijke wortels $y=y_0$ bezit, heeft men

$$f_0=0,\ \frac{\partial f_0}{\partial y}=0,\ .\;.\;.\;.\;\frac{\partial^{p-1} f_0}{\partial y^{p-1}}=0\,;$$

terwijl (B) dan overgaat in de gedaante

$$\begin{aligned}&(y-y_0)^p\,\{A+A_1(y-y_0)\ldots.+A_{n-p}(y-y_0)^{n-p}\}+\\&+(x-x_0)\,\{B+B_1(y-y_0)\ldots.+B_n(y-y_0)^n\}+\\&+(x-x_0)^2\,\{C+C_1(y-y_0)\ldots.+C_n(y-y_0)^n\}+\\&+(x-x_0)^3\,\{D+D_1(y-y_0)\ldots.+D_n(y-y_0)^n\}+\\&+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;=0\;.\;.\;.\;.\;(C)\end{aligned}$$

Voert men nu nieuwe veranderlijken in, bepaald door de betrekkingen

$$y-y_0=\eta,\quad x-x_0=\xi,$$

zoo krijgt men

$$\begin{aligned}&\eta^p\,(A+A_1\eta+A_2\eta^2\ldots.+A_{n-p}\eta^{n-p})+\\&+\xi\;(B+B_1\eta\ldots\ldots\ldots\ldots+B_n\eta^n)+\\&+\xi^2\,(C+C_1\eta\ldots\ldots\ldots\ldots+C_n\eta^n)+\\&+\xi^3\,(D+D_1\eta\ldots\ldots\ldots\ldots+D_n\eta^n)+\\&+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;=0\;.\;.\;.\;.\;(D)\end{aligned}$$

Neemt men nu aan

$$\frac{\partial f_0}{\partial x}\lessgtr 0,$$

dan is in (D) de term met ξ niet nul.

Van de functie η, worden nu, in het nulpunt van ξ, p waarden gelijk, die, voor een willekeurige andere waarde van ξ, in het algemeen, allen verschillen. Om nu te onderzoeken, op welke wijze de p verschillende takken van η, die in het punt $\xi = 0$ samenkomen, bij een omloop van ξ om dit vertakkingspunt, in elkaar overgaan, redeneert PUISEUX aldus.

Neemt men, in plaats van (A), de vergelijking

$$A\eta'^p + B\xi = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

zoodat

$$\eta'^p = -\frac{B}{A}\xi = \alpha\,\xi,$$

en noemt men

$$\alpha_1, \alpha_2 = \alpha_1^2, \alpha_3 = \alpha_1^3, \ldots . \alpha_p = \alpha_1^p,$$

de p verschillende wortels van

$$\alpha'^p = 1,$$

dan heeft (1), voor elke waarde van ξ, de p verschillende wortels

$$\left.\begin{array}{l} \eta'_1 = \alpha_1\, \alpha^{\frac{1}{p}}\, \xi^{\frac{1}{p}}, \\ \eta'_2 = \alpha_2\, \alpha^{\frac{1}{p}}\, \xi^{\frac{1}{p}}, \\ \eta'_3 = \alpha_3\, \alpha^{\frac{1}{p}}\, \xi^{\frac{1}{p}}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \eta'_p = \alpha_p\, \alpha^{\frac{1}{p}}\, \xi^{\frac{1}{p}}. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Laat men nu ξ, van een zekere aanvangswaarde af, om het vertakkingspunt een cirkel beschrijven met een onbegrensd kleinen straal ρ, dan gaat telkens de waarde η'_x over in η'_{x+1}.

Voor dezelfde aanvangswaarde van ξ stemmen echter de p overeenkomstige wortels

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots . \eta_p \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

van (D) niet volkomen overeen met

$$\eta'_1, \eta'_2, \eta'^3, \ldots . \eta'_p \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

De grootheden α_x zijn eindig (*mod* 1) en wanneer men ξ als onbegrensd klein van de eerste orde aanneemt, worden dus de grootheden η'_x onbegrensd klein van de orde $\frac{1}{p}$. Dit is dus ook met hare verschillen het geval.

Nu weet men, dat de verschikkingen, die de p waarden (3), ten gevolge van den beschreven omloop van x, ondergaan, alleen ten gevolge kunnen hebben, dat deze zelfde grootheden nà dien omloop weer te voorschijn komen, zij het ook in een andere volgorde. De verschillen tusschen $\eta_\varkappa$ en $\eta_\varkappa'$ zijn echter onbegrensd klein van een hoogere orde dan $\frac{1}{p}$, zoowel vóór als nà den omloop van x. Als nu $\eta_\varkappa$, na den omloop van x, niet overging in $\eta_{\varkappa+1}$, maar in η_λ, overeenstemmende met η'_λ, zou het verschil in orde van η_λ, — zoowel met η'_λ als met $\eta'_{\varkappa+1}$ — hooger zijn dan $\frac{1}{p}$; en dus zou dit ook met het verschil in orde van die grootheden onderling het geval moeten zijn, wat ongerijmd is.

Nadat Puiseux op deze wijze heeft uitgemaakt, op welke wijze de verschillende takken in elkaar overgaan, gaat hij over tot de reeksontwikkeling in de vertakkingspunten.

Voert men een nieuwe veranderlijke τ in, bepaald door de betrekking

$$\xi = \tau^p, \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

dan gaat (D) over in

$$\begin{aligned} &\eta^p(A + A_1\eta \dots\dots + A_{n-p}\eta^{n-p}) + \\ &+ \tau^p(B + B_1\eta \dots\dots + B_n\eta^n) + \\ &+ \tau^{2p}(C + C_1\eta \dots\dots + C_n\eta^n) + \\ &+ \tau^{3p}(D + D_2\eta \dots\dots + D_n\eta^n) + \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots = 0. \quad \dots\dots \quad (E) \end{aligned}$$

Stelt men nu

$$\eta = v\,\tau, \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (6)$$

zoo krijgt men

$$\begin{aligned} &v^p(A + A_1 v\tau + A_2 v^2\tau^2 \dots\dots + A_{n-p}v^{n-p}\tau^{n-p}) + \\ &+ B + B_1 v\tau + B_2 v^2\tau^2 \dots\dots + B_n v^n\tau^n + \\ &+ \tau^p(C + C_1 v\tau \dots\dots\dots\dots + C_n v^n\tau^n) + \\ &+ \tau^{2p}(D + D_1 v\tau \dots\dots\dots\dots + D_n v^n\tau^n) + \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots = 0 \quad \dots\dots \quad (F) \end{aligned}$$

In deze vergelijking heeft v, voor $\tau = 0$, p verschillende eindige waarden, en kan dus, binnen een zeker eindig gebied van τ, elke van de p takken $v_\varkappa$, in de omgeving van het

punt $\tau = 0$, ontwikkeld worden volgens de reeks van MACLAURIN, zoodat

$$v_\varkappa = a_1 + a_2 \tau + a_3 \tau^2 + a_4 \tau^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

waarin, volgens (6), $v_\varkappa$ overeenstemt met $\eta_\varkappa$; terwijl uit de overeenkomst van de coëfficienten van de vergelijking

$$A\,\eta^p + B\,\tau^p = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

met die van (1) blijkt, dat

$$a_1 = \alpha_\varkappa\,\alpha^{\frac{1}{p}}.$$

Volgens (6) heeft men dus ook

$$\eta_\varkappa = a_1 \tau + a_2 \tau^2 + a_3 \tau^3, + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

die, ten gevolge van (5), overgaat in

$$\eta_\varkappa = a_1\,\xi^{\frac{1}{p}} + a_2\,\xi^{\frac{2}{p}} + a_3\,\xi^{\frac{3}{p}} + \ldots\ldots,$$

of

$$y_\varkappa - y_0 = a_1 (x - x_0)^{\frac{1}{p}} + a_2 (x - x_0)^{\frac{2}{p}} + a_3 (x - x_0)^{\frac{3}{p}} + \ldots \quad (10)$$

11. De redeneering, waardoor PUISEUX aantoont, hoe de verwisseling van de takken $\eta'_\varkappa$, door grensovergang, op die van de overeenkomstige takken $\eta_\varkappa$ kan worden overgedragen, is fijn bedacht; maar doet tevens de voorwaarde uitkomen, waaraan voldaan moet worden. Zij steunt op de vooronderstelling, dat de grootheid

$$\alpha = -\frac{B}{A}$$

eindig is, wat hierop neerkomt, dat de functie η of y geen nulpunt mag bezitten, dat onbegrensd dicht bij het vertakkingspunt ligt. Evenmin mag het voorkomen, dat dit het geval is met een van de coëfficienten B, C, $D_\tau \ldots$; in welk geval de mogelijkheid bestaat, dat die functie een pool bezit, op onbegrensd kleinen afstand van het vertakkingspunt.

In het eerste geval toch zouden de grootheden $\eta'_\varkappa$, bij het voldoen aan de betrekkingen (2), eindige of zelfs onbegrensd groote waarden kunnen verkrijgen; terwijl in het tweede geval uit (2) blijkt, dat deze grootheden onbegrensd klein worden van een hoogere orde dan $\frac{1}{p}$, en dus hun onderlinge verschillen kleiner zouden kunnen worden dan die met de groodheden $\eta_\varkappa$.

Evenzoo blijkt, voor deze gevallen, het onvoldoende van

de theorie uit de vergelijking (F). Daar toch blijkt, dat, wanneer A onbegrensd klein is voor $\tau = 0$, v onbegrensd groot wordt, en er dus, in de omgeving van dat punt, van een reeks van MACLAURIN geen sprake kan zijn. Ook het geval, dat B onbegrensd klein is, leidt hier tot moeilijkheden, omdat dan p verschillende nulpunten van v in elkaars onmiddellijke nabijheid zouden liggen, en de reeksontwikkeling (7) hare beteekenis zou verliezen.

Wij hebben daarom de eigenschap:

Opdat de reeksontwikkelingen van een stelkundige functie, volgens gebroken machten van de veranderlijke, in de vertakkingspunten mogen worden toegepast, is het noodig en voldoende, dat er tusschen de nulpunten, polen en vertakkingspunten van die functie eindige afstanden bestaan.

Bij de toepassing van de stelkundige functiën in de analyse maakt men echter slechts gebruik van functiën, die niet alleen aan een vergelijking van de gedaante (A) voldoen; maar die ook, voor alle waarden van de onafhankelijk veranderlijke, binnen een bepaald en eindig gebied, volgens geheele of gebroken machten van die veranderlijke in een reeks ontwikkeld kunnen worden. Het is daarom wenschelijk de bepaling van die functiën in dien zin te wijzigen, waarom ik de volgende definitie voorstel:

Een stelkundige functie is een functie, die aan een vergelijking van de gedaante (A) voldoet, en waarbij er tusschen de nulpunten, polen en vertakkingspunten steeds eindige afstanden bestaan.

12. De theorie van PUISEUX steunt op het onderling vergelijken van oneindig kleinen van verschillende orden, een methode, die, bij het tegenwoordige standpunt van de analyse, verouderd is. Ik zal daarom nagaan, op welke wijze dezelfde uitkomsten door grensbepalingen meer rechtstreeks te voorschijn treden. Hierbij merk ik vooreerst op, dat er geen enkele reden bestaat, dat de nulpunten, bij een gegeven functie, een verandering in het continue doorloopen van hare waarden zouden kunnen bewerkstelligen, wanneer men aan een continue verandering van de functie deze meer uitgebreide beteekenis hecht, dat met een onbegrensd kleine aangroeiing

$d\xi$ van de veranderlijke een onbegrensd kleine aangroeiing $d\eta$ van de functie overeenkomt. De functie η, die bepaald wordt door de vergelijking (D), verkrijgt dus ook in het vertakkingspunt $\xi = 0$ en diens onmiddellijke omgeving een onbegrensd kleine aangroeiing $d\eta$, als $d\xi$ de aangroeiing van ξ is. Gaat men nu echter tot de grens over, dan ziet men terstond, dat niet $\frac{d\eta}{d\xi}$ tot een bepaalde en eindige grens nadert, maar dat dit wel het geval is met $\frac{d\eta^p}{d\xi}$.

Voert men nu echter wederom een andere veranderlijke τ in, bepaald door de betrekking (5) van § 10, zoodat men weder tot de vergelijking (E) geraakt, dan blijkt het dat, in het algemeen, de waarde van $\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^p$ tot een bepaalde en eindige grenswaarde $-\frac{B}{A} = \alpha$ nadert.

Ook à posteriori blijkt nu de juistheid van onze voorafgaande opmerking, want uit

$$\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^p = \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

volgt, dat ook $\frac{d\eta}{d\tau}$ steeds tot een eindige grenswaarde nadert; maar deze is op een begrensd aantal wijzen onbepaald, daar $\frac{d\eta}{d\tau}$ nu p verschillende waarden heeft.

Dezelfde uitzonderingen doen zich hier weer voor als bij de toepassing van de vorige methode; want zijn òf A, òf B onbegrensd klein, dan nadert $\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^p$ niet meer tot een grens, die eindig en bepaald is. Ik sluit deze gevallen daarom uit.

Volgens mijn bepaling van een stelkundige functie, bestaat er nu, in de omgeving van het beschouwde vertakkingspunt, een eindig gebied G, waarbinnen de functie η geen pool of nieuw vertakkingspunt bezit, en het is een van de grondbegrippen van de theorie van de complexe veranderlijken, dat dit dan ook niet het geval kan zijn met een van

haar differentiaalquotienten. Noemt men nu $\frac{d\eta_\varkappa}{d\tau}$ een bepaalde van de p verschillende waarden, die $\frac{d\eta}{d\tau}$ in het vertakkingspunt kan aannemen, dan is dus $\frac{d\eta_\varkappa}{d\tau}$ een functie, die zoowel in het vertakkingspunt zelf, als in het gebied G, steeds eindig en bepaald is. Zij kan daarom, volgens het theorema van CAUCHY, in de omgeving van het punt $\tau = 0$ ontwikkeld worden volgens de reeks van MACLAURIN, zoodat

$$\frac{d\eta_\varkappa}{d\tau} = a_{\varkappa_1} + 2\,a_{\varkappa_2}\,\tau + 3\,a_{\varkappa_3}\,\tau^2 + 4\,a_{\varkappa_4}\,\tau^4, + \dots \quad . \quad (2)$$

en dus ook

$$\eta_\varkappa = a_{\varkappa_1}\,\tau + a_{\varkappa_2}\,\tau^2 + a_{\varkappa_3}\,\tau^3 + \dots,$$

$$y_\varkappa = y_0 = a_{\varkappa_1}\,(x - x_0)^{\frac{1}{p}} + a_{\varkappa_2}\,(x - x_0)^{\frac{2}{p}} + a_{\varkappa_3}\,(x - x_0)^{\frac{3}{p}} + \dots \quad (3)$$

Nu volgt uit (1)

$$\frac{d\eta_{\varkappa+1}}{d\tau} = \alpha_1\,\frac{d\eta_\varkappa}{d\tau}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

waarin α_1 wederom een van de eenheidswortels voorstelt. Bij een omloop van x om het vertakkingspunt wordt dus de waarde van het differentiaalquotient, dat bij een van die takken behoort, met den standvastigen factor α_1 vermenigvuldigd; en uit (3) blijkt, dat diezelfde omloop ten gevolge heeft dat ook de reeksontwikkeling van $y - y_0$ met dienzelfden factor vermenigvuldigd wordt.

Hieruit volgt de eigenschap:

Wanneer een functie op een zoodanige wijze discontinue wordt, dat haar eerste differentiaalquotienten de wortels zijn van een binomische vergelijking; en de functie, binnen een eindig gebied om dat vertakkingspunt, eindig en continue blijft, worden de verwisselingen van de verschillende takken van die functie, binnen dat gebied, door die van de binomische vergelijking bepaald.

13. Gaan wij nu over tot het geval

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = 0.$$

Neemt men nu aan, dat $d\xi$ onbegrensd klein is van de eerste orde, en noemt men μ de overeenkomstige orde van $d\eta$,

dan past PUISEUX een methode toe, die meetkundig op een zinrijke wijze wordt voorgesteld en van NEWTON afkomstig is (LAURENT, »Traité d'Analyse"). Zijne ontwikkelingen voor dit geval loopen op nog al omslachtige berekeningen uit, en wil ik daarom laten rusten; te meer, omdat mijn methode van rechtstreeksche grensbepaling in beginsel op hetzelfde neerkomt, en de toepassing op bijzondere gevallen voldoende is, om er het karakter van te doen kennen.

1ste voorbeeld.

$$A\,\eta^{18} + A_i\,\xi^{6} = 0.$$

Hierbij vooronderstel ik, dat alle termen met η en ξ gezamentlijk ontbreken, terwijl ik alle termen van η en ξ, waarvan de exponenten respectievelijk hooger zijn dan 18 en 6 heb weggelaten, omdat ze voor de grensbepaling niet in aanmerking komen. Wij hebben, in dit bijzonder geval, dat 6 een deeler is van η en daarom kan men schrijven

$$A\left(\frac{\eta^{3}}{\xi}\right)^{6} + A_i = 0.$$

Neemt men nu

$$\xi = \tau^{3},$$

zoo krijgt men

$$A\left\{\left(\frac{\eta}{\tau}\right)^{3}\right\}^{6} + A_i = 0,$$

en tot den grens overgaande

$$A\left\{\left(\frac{d\,\eta}{d\,\tau}\right)^{3}\right\}^{6} + A_i = 0.$$

Deze vergelijking levert achttien waarden voor $\dfrac{d\,\eta}{d\,\tau}$ op, die onderling allen eindige grootheden verschillen en bepaald worden door de wortels van de binomische vergelijkingen

$$v^{3} + a = 0,\quad w^{6} + b = 0.$$

Tevens is het duidelijk, dat er, bij de groepering van de achttien verschillende waarden van $\dfrac{d\,\eta}{d\,\tau}$, twee verschillende cycles optreden, bepaald door die twee binomische vergelijkingen.

2de voorbeeld

$$A\,\eta^{18} + A_1\,\eta^{16}\,\xi^{2} + A_2\,\eta^{11}\,\xi^{3} + A_3\,\xi^{6}\,\xi^{4} + A_4\,\eta^{3}\,\xi^{5} + A_5\,\xi^{6} = 0.$$

Na deeling door ξ^6, kan men schrijven

$$A\left(\frac{\eta^3}{\xi}\right)^6 + A_1\eta^4\left(\frac{\eta^3}{\xi}\right)^4 + A_2\eta^2\left(\frac{\eta^3}{\xi}\right)^3 + A_3\left(\frac{\eta^3}{\xi}\right)^2 + A^4\eta^3 + A_5 = 0.$$

Stelt men nu weer

$$\xi = \tau^3,$$

en gaat men tot den grens over, dan verkrijgt men voor de bepaling van de verschillende waarden van $\frac{d\eta}{d\tau}$ de vergelijking

$$A\left\{\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^3\right\}^6 + A_3\left\{\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^3\right\}^2 + A_4\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^3 + A_5 = 0.$$

Hierin verkrijgt $\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^3$ zes waarden, die allen van 0 verschillen en bepaald worden door de vergelijking

$$A\,v^6 + A_3\,v^2 + A_4\,v + A_5 = 0.$$

Neemt men nu aan, dat de wortels van deze vergelijking allen onderling verschillen, zoo verkrijgt $\frac{d\eta}{d\tau}$ wederom achttien onderling verschillende waarden, bepaald door de vergelijkingen

$$\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^3 = v_1, \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^3 = v_2, \ldots. \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^3 = v_6.$$

3^{de} voorbeeld

$$c\,\eta^3 + d\,\xi^7 = 0.$$

Stelt men nu

$$\eta = z^7 \text{ en } \xi = \tau^3,$$

zoo krijgt men

$$c\,(z^7)^3 + d\,(\tau^3)^7 = 0,$$
$$c\,(z^7)^3 + d\,(\tau^7)^3 = 0,$$

en tot den grens overgaande

$$\left\{\left(\frac{d\,z}{d\,\tau}\right)^7\right\}^3 = -\frac{d}{c}.$$

Men zou hier nu een en twintig verschillende waarden van $\frac{d\eta}{dt}$ vinden, bepaald door de twee binomische vergelijkingen

$$v^7 = a, \; w^3 = b;$$

maar de cycle, waartoe de eerste van deze vergelijkingen

aanleiding geeft, heeft geen invloed op de overeenkomstige takken van $\frac{d\eta}{d\tau}$. Wanneer toch τ een omloop om het punt $\tau=0$ beschrijft en ten gevolge daarvan $\frac{dz_\varkappa}{d\tau}$ overgaat in $\frac{dz_{\varkappa+1}}{d\tau}$, volgt daarentegen uit de betrekking

$$\left(\frac{dz_\varkappa}{d\tau}\right)^7=\left(\frac{dz_{\varkappa+1}}{d\tau}\right)^7=a,$$

dat de zevende macht van dit differentiaalquotient onveranderd blijft. Uit de eigenschap, die wij afgeleid hebben, dat de cyclische verwisselingen van de functie zelf overeenkomen met die van hare eerste differentiaalquotienten, volgt hieruit, dat z^7 of η, ten gevolge van dien omloop, ook onveranderd is gebleven.

Men kan echter, in dit geval, nog op een eenvoudiger wijze tot de oplossing geraken.

Stelt men toch

$$\xi^7=\tau^3,$$

zoo krijgt men terstond

$$c\left(\frac{\eta}{\tau}\right)^3+d=0,$$

en tot den grens overgaande

$$c\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^3+d=0.$$

14. In de meeste gevallen moet echter de toepassing van deze methode eenigszins gewijzigd worden; maar ook dan levert de toepassing van de grensmethode geen principieele bezwaren op. Ik zal mij beperken tot eenige gevallen, die zich kunnen voordoen bij het geval van drie gelijke wortels y, en daarbij de reeksontwikkeling van Taylor in de volgende gedaante schrijven

$$F=f+\left(\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial x}dx\right)+$$

$$+\frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dy\,dx+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2\right)+$$

$$+\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}dy^2dx+3\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}dy\,dx^2+\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3\right)+$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Neemt men nu aan, dat, in dit geval, behalve $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, alleen $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ is, dan bepaalt de vergelijking

$$2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} d y \, d x + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} d x^2 = 0,$$

of

$$2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} d y + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} d x = 0,$$

één van de waarden van $\frac{d y}{d x}$ en dus ook slechts één tak, die niet in cyclischen samenhang tot de andere takken staat, en dus onmiddellijk volgens de reeks van TAYLOR kan ontwikkeld worden.

De andere waarden van $\frac{d y}{d x}$, en dus ook de daarbij behoorende takken, worden bepaald door de vergelijking

$$\frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} d y^3 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} d y \, d x = 0,$$

of

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} d y^2 + 6 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} d x = 0,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \left(\frac{d y}{d x^{\frac{1}{2}}} \right)^2 + 6 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0.$$

Stelt men wederom $x^{\frac{1}{2}} = \tau$, zoo levert de voorgaande vergelijking twee takken op, die cyclisch samenhangen.

Vooronderstellen wij nu, dat buitendien

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0,$$

dan worden de drie takken bepaald door de betrekking

$$\frac{1}{3} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} d y^3 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} d x^2 = 0,$$

en in dit geval vormen de drie takken één cycle.

Zij verder nog

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,$$

dan worden er drie verschillende takken, zonder cyclischen samenhang, bepaald door de vergelijking

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)\left(\frac{d y}{d x}\right)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}\left(\frac{d y}{d x}\right)^2 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}\frac{d y}{d x} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0,$$

en kunnen ze allen terstond ontwikkeld worden volgens de opklimmende machten van $x - x_0$.

Er blijft nog één punt ter bespreking over, en dat ik slechts even wil aanstippen; namelijk het geval, dat het eerste differentiaalquotient zelf gelijke waarden in het vertakkingspunt verkrijgt. In dat geval moet men overgaan tot het tweede differentiaalquotient, welks waarden door een nieuwe vertakkingsvergelijking bepaald worden.

15. Aan het einde gekomen van de taak, die ik mij voor ditmaal heb gesteld, wil ik wijzen op wat er oorspronkelijks in mijne beschouwingen is.

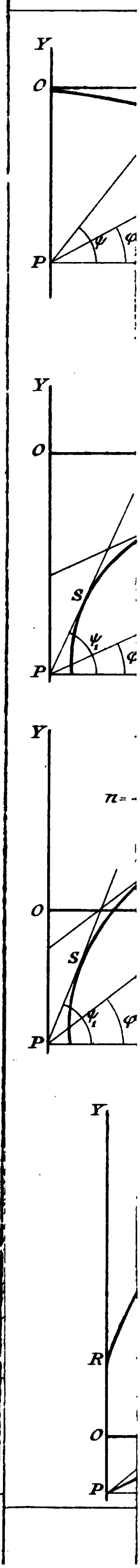
Een onjuiste opvatting aangaande den invloed van het verwisselen van de orde van integratie bij dubbelintegralen, en van Cauchy afkomstig, heb ik aangewezen en verbeterd, en het is duidelijk, dat diezelfde beschouwing doorgaat met betrekking tot het differentieeren en integreeren ten opzichte van standvastigen onder het integraalteeken. Maar deze beschouwing leidt nog tot een ander en positieve uitkomst. Zij doet ons kennis maken met functiën van twee onafhankelijk veranderlijken, die een eigenaardige afwijking vertoonen van wat men gewoonlijk onder het begrip van continuiteit verstaat, een afwijking, die, voor zoover ik weet, tot dusverre alleen bij functiën van één complexe veranderlijke werd onderzocht; terwijl zij uit een geschiedkundig oogpunt merkwaardig is, omdat zij de klove overbrugt, die de tweede methode van Cauchy van zijn eerste scheidt.

Van de reeks van Laurent heb ik een bewijs gegeven, dat, voor zoover mij bekend, oorspronkelijk is, en aan de eerste methode van Cauchy een uitbreiding geeft, die haar meer doet aansluiten aan de methode, later door Riemann gevonden.

Op het gebied van de stelkundige functiën, heb ik — bij het trachten, om aan zijn grondbegrippen recht te laten wedervaren — den vorm, waarin Puiseux tracht den cyclischen overgang van de takken bij een omloop om de vertakkingspunten te bewijzen, zoodanig omgewerkt, dat dit bewijs bijna als nieuw kan worden aangemerkt.

Aan het begrip van een stelkundige functie heb ik een beperking toegevoegd, die op een natuurlijke wijze voor den dag komt bij het zoeken naar een gestreng bewijs van de hoofdeigenschappen dier functiën, en waarvan men de noodzakelijkheid gevoelt, wanneer men bedenkt, dat verschillende groote wiskundigen van den laatsten tijd deze beperking als een eigenschap en een gevolg van de reeksontwikkelingen hebben aangenomen — wat niet logisch is en vooral bij vergelijking met de overeenkomstige theorie van de kromme lijnen in de meetkunde, waar deze beperking niet geldt, tot misvatting aanleiding zou geven.

Voor het bepalen van den samenhang der verschillende takken heb ik een methode toegepast, die in vele gevallen praktisch gemakkelijk den weg wijst. De eigenschap, dat de verwisseling van de takken bepaald wordt door een gewone vergelijking, waarvan de overeenkomstige waarden van het eerste differentiaalquotient de wortels zijn, is oorspronkelijk, en geeft een groote doorzichtigheid aan de geheele theorie. Zij voert onmiddellijk, zonder dat verdere nevenbetrachtingen noodig zijn, tot de wijze, waarop de verschillende takken van de functie, bij een omloop om de vertakkingspunten, in elkaar overgaan. Bovendien leert zij ons niet alleen inzien op welke wijze de eerste grondbegrippen van de differentiaalrekening hier niet doorgaan, maar geeft tevens een middel aan de hand, om die grondbegrippen zelf uittebreiden.


Y
O
P
ψ
φ
S
ψ1
n= -
R

BOEKDRUKKERIJ VAN E. J. BRILL, LEIDEN.